METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL REVIEW OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE ZEITSCHRIFT

DIRETTORE PROPRIETARIO — DIRECTEUR ET PROPRIÉTAIRE
EDITOR AND PROPRIETOR — HERAUSGEBER UND EIGENTHÜMER

Prof. Dott. Corrado Gini, *Direttore dell'Istituto di Statistica della R. Università di Roma.*

COMITATO DIRETTIVO — COMITÉ DE DIRECTION
EDITORIAL COMMITTEE — DIREKTION-KOMITEE

Prof. A. Andréadès, *prof. de Science des finances à l'Université d'Athènes* (Grèce),
Prof. F. Bernstein, *Direktor des Instituts für mathematische Statistik der Universität. Göttingen* (Deutschland).
Prof. A. E. Bunge, *director gen. de Estadística de la Nación, Buenos Aires* (Argentina).
Prof. F. P. Cantelli, *professore di Matematica Attuariale nel R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Roma* (Italia).
Prof. C. V. L. Charlier, *professor der Astronomie an der Universität Lund* (Schweden).
Prof. A. Flores de Lemus, *jefe de Estadística del Min. de Hacienda, Madrid* (España).
Prof. M. Greenwood, *professor of Epidemiology and Vital Statistics in the University of London* (England).
Dott G. Jahn, *directeur du Bureau Central de Statistique de Norvège, Oslo* (Norvège).
Prof. A. Julin, *secrétaire général honoraire du Ministère de l'Industrie et du Travail et de la Prévoyance sociale, Bruxelles* (Belgique).
Ing. L. March, *directeur honoraire de la Statistique générale de la France, Paris* (France).
Prof. H. W. Methorst, *directeur de l'Office permanent de l'Institut International de Statistique et du Bureau central de Statistique, La Haye* (Pays-Bas).
Prof. W. F. Ogburn, *professor of Sociology in the University of Chicago* (U. S. A.).
Prof. R. Pearl, *director of the department of Biology of the School of Hygiene and Public Health, Baltimore* (U. S. A.).
Prof. H. Westergaard, *professor in the University of Copenhagen* (Denmark).

AMMINISTRATORE — ADMINISTRATEUR — MANAGER — VERWALTER

Dott. Silvio Orlandi, *Istituto di Statistica della R. Università di Roma.*

SEGRETARI DI REDAZIONE — SECRÉTAIRES DE RÉDACTION
EDITORIAL SECRETARIES — REDACTIONSSECRETAERE

Prof. Luigi Galvani — Prof. Mario Saibante

Vol. X - N. 4 **28-II-1933.**

SOMMARIO — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

V. Castellano. *Sulle relazioni tra curve di frequenza e curve di concentrazione e sui rapporti di concentrazione corrispondenti a determinate distribuzioni* Pag. 3
P. Lorenz. *Ueber Näherungs-parabeln hohen Grades und ihre Aufgabe in der Konjunkturforschung* . . . . . » 61
Cassa Nazionale malattie per gli Addetti al Commercio. *Tavole di morbilità e frequenza delle malattie per i prestatori d'opera del Commercio* (Esperienza 1931). . . . . » 79
Bibliografia . . . . . » 209

ROMA

AMMINISTRAZIONE DEL «METRON»
R. UNIVERSITÀ — ISTITUTO DI STATISTICA

ARTICOLI GIUNTI ALLA RIVISTA CHE VERRANNO PUBBLICATI NEI PROSSIMI NUMERI.

(*Secondo l'ordine d'arrivo*).

ARTICLES REÇUS PAR LA REVUE ET À PARAÎTRE PROCHAINEMENT.

(*D'après la date de reception*).

ARTIKEL DIE AN DIE ZEITSCHRIFT ANGELANGT SIND UND WELCHE IN DEN NACHFOLGENDEN NUMMERN ERSCHEINEN WERDEN.

(*Nach der Reihenfolge des Eingangs*)

ARTICLES RECEIVED BY THE REVIEW WHICH WILL BE PUBLISHEED IN FUTURE ISSUES.

(*According to date of receipt*)

Curtis Bruen. *Five Variable Straight Line Diagram.*

C. Gini, M. Boldrini, L. Galvani, A. Venere. *Sui centri della popolazione e sulle loro applicazioni.*

T. Salvemini. *Sulla interpolazione grafica di istogrammi.*

V. Castellano. *Sullo scarto quadratico medio della probabilità di transvariazione.*

H. von Schelling. *Die Konzentration einer Verteilung und ihre Abhängigkeit von den Grenzen des Variationsbereiches.*

G. Lucatello. *La popolazione studentesca dell'Università di Grenoble.*

E. Merzrath. *Anpassung von Flächen an zweidimensionale Kollektivgegenstände und ihre Auswertung für die Korrelationstheorie.*

C. E. Dieulefait. *Sur les développements des fonctions des fréquences en séries de fonctions orthogonales.*

N. Smirnoff. *Ueber die Verteilung des allgemeinen Gliedes in der Variationsreihe.*

P. R. Rider. *The third and fourth Moments of the generalized Lexis Theory.*

Gli Autori degli articoli inviati per la pubblicazione nella Rivista, rinunciano in favore della medesima alla proprietà letteraria degli articoli stessi, qualora vengano pubblicati.

The Authors of papers sent for publication in the Review are supposed to give up their copyright in favour of the Review if the papers are published.

Les Auteurs des articles envoyés à la Revue, pour y être publiés, renoncent, en faveur de celle-ci, à la propriéte littéraire de leurs articles, s'ils sont acceptés.

Die Verfasser der zur Veröffentlichung in der Zeitschrift zugesandten Aufsätzs, werden, falls selbige veröffentlicht werden, auf ihre Verfasserrechte zu Gunsten der Zeitschrift verzichten müssen.

VITTORIO CASTELLANO

Sulle relazioni tra curve di frequenza e curve di concentrazione e sui rapporti di concentrazione corrispondenti a determinate distribuzioni

SOMMARIO

I. — *Generalità intorno alle curve di concentrazione ed al rapporto di concentrazione.*

1) Definizione della « curva di concentrazione ». Determinazione analitica della curva nel caso in cui il carattere assume una successione discreta di valori. — 2) Determinazione analitica della curva di concentrazione nel caso di una distribuzione continua. Determinazione della tangente. Punti di discontinuità di questa. — 3) Relazioni grafiche tra le curve di concentrazione e loro significato dinamico. — 4) Effetti di una translazione della curva di frequenza sull'asse delle ascisse. Invariante di una distribuzione. — 5) Il « rapporto di concentrazione ». Caso dell'esistenza di un limite inferiore e di un limite superiore per le intensità del carattere. Formule di Gini. — 6) Come si esprime il rapporto di concentrazione mediante l'invariante della distribuzione. Nuova definizione di « polo ». — 7) Relazione tra i valori del rapporto di concentrazione relativi a distribuzioni aventi curve di frequenza uguali, ma poli diversi, e a distribuzioni di uguale polo, ma aventi curve di frequenza simmetriche.

II. — *Determinazione analitica delle curve di concentrazione relative a vari tipi di distribuzioni, e calcolo del rapporto di concentrazione.*

8) Caso di una frequenza costante. — 9) Caso di un istogramma. Le curve di concentrazione come inviluppo di un sistema di parabole del 2° ordine, ad assi paralleli. — 10) Caso di una distribuzione lineare. — 11) Generalizzazione del caso precedente (poligonale). — 12) Distribuzione di tipo circolare, o ellittico. Costruzione grafica della curva di concentrazione. — 13) Dimostrazione della simmetria delle curve di concentrazione relative a curve di frequenza simmetriche. — 14) Distribuzioni di tipo iperbolico. — 15) Caso particolare della curva dei redditi (Pareto). — 16) Distribuzioni esponenziali. — 17) Generalizzazione del caso precedente: distribuzioni rappresentate dal momento d'ordine $\frac{k}{h}$ della curva esponenziale. Determinazione analitica della concentrazione dell'energia cinetica fra le molecole di un gas, in base alla legge della ripartizione normale delle velocità. — 18) Distribuzioni rappresentate dal momento d'ordine k della curva di Gauss. Misura della concentrazione (dei valori assoluti) degli errori causali e della concentrazione della velocità delle molecole dei gas.

I.

Generalità intorno alle curve di concentrazione ed al rapporto di concentrazione.

1) Data una distribuzione statistica è noto che se si indicano con q la frazione minima dell'ammontare totale del carattere che corrisponde ad una frazione p del numero totale n degli elementi della distribuzione, questa definisce q come funzione univoca, continua (1) e crescente di p. Se si assumono le p come ascisse, e le q come ordinate di un sistema cartesiano ortogonale, il punto (pq) descrive sul piano rappresentativo, al variare di p, una curva, detta curva di concentrazione, che giace tutta nel triangolo rettangolo (00), (10), (11) e rivolge la concavità verso l'alto.

Se in tutti gli elementi della distribuzione il carattere presenta la stessa intensità, la curva di concentrazione coincide con la ipotenusa di detto triangolo, che chiamasi anche, pertanto, retta di equidistribuzione ; se ad $n - 1$, elementi della distribuzione, spetta il valore 0 del carattere, tutto l'ammontare di questo essendo relativo ad un solo elemento, la curva di concentrazione consta : della retta $q = 0$, dall'origine al punto $\left(\frac{n-1}{n}, 0\right)$ e della retta $q = n\left(p - \frac{n-1}{n}\right)$ dal punto $\left(\frac{n-1}{n}, 0\right)$ al punto (11). Questa

---

(1) Alcuni Autori (cfr. ad esempio C. Gini: *Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri*, in « Atti del R. Istituto Veneto di S. L. A. », 1913-1914, Tomo LXXIII, P. 2° ; e L. Galvani: *Sulle curve di concentrazione relative a caratteri limitati e non limitati* in « Metron », Vol. 10) considerano la curva di concentrazione come limite di una curva a scala, quando il numero degli elementi della distribuzione tende all'infinito, poichè fanno corrispondere ai valori di p, relativi a un numero intero di elementi di questa, l'ammontare minimo del carattere da essi posseduto, e tengono costante q nell'intervallo tra due così fatti valori di p.

Ed è giusto modo di vedere. Ma noi, per ragioni di continuità, preferiamo far crescere, nell'intervallo, q proporzionalmente a p, come se ciascun elemento fosse costituito di particelle infinitesime, fra le quali è distribuita uniformemente la quantità del carattere. Donde segue, in ogni caso, la continuità della curva di concentrazione.

retta, al crescere di n ruota nel verso positivo, descrivendo un fascio di centro (11), al quale appartiene la retta di equidistribuzione ($n = 1$), ma non la retta $p = 1$, la quale costituisce invece la posizione limite delle rette del fascio.

Se il carattere può assumere soltanto una successione discreta di valori $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$ $(x_i < x_{i+1})$, indicato con f_i il numero delle volte in cui esso presenta il valore $x_i \left(\sum_1^k f_i = n \right)$ e con $m_i = f_i x_i$ l'ammontare del carattere spettante a tali f_i elementi della distribuzione; con $m = \sum_1^k m_i$ l'ammontare totale del carattere, è chiaro che i punti

$$p_i = \frac{1}{n} \sum_1^i f_j \,, \quad q_i = \frac{1}{m} \sum_1^i m_j \qquad (2) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots\ldots k)$$

appartengono alla curva di concentrazione. Inoltre posto $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$, $\Delta q_i = q_{i+1} - q_i$ e indicata con h una quantità positiva compresa tra 0 e 1, si verifica anche immediatamente che è:

$\begin{cases} p = p_i + h \Delta p_i \\ q = q_i + h \Delta q_i \end{cases}$ un punto generico della curva di concentrazione, compreso tra i punti (p_i, q_i) e (p_{i+1}, q_{i+1}). In questo caso quindi la curva di concentrazione s'identifica con la poligonale che ha per vertici i punti (2). Essa possiede $n - 1$ punti angolari che corrispondono agli $n - 1$ intervalli di discontinuità della variabile indipendente x. L'equazione della retta generica della poligonale, che passa per i punti (p_i, q_i) e (p_{i+1}, q_{i+1}) è $q - q_i = (p - p_i) \frac{n}{m} x_{i+1}$.

2) Possa invece il carattere assumere con continuità tutti i valori di un certo intervallo c_1, c_2 $(0 \leq c_1 < c_2)$. Indicato con x il valore generico del carattere, con $f(x)\,dx$ il numero delle volte in cui esso presenta i valori compresi tra x e $x + dx$, la curva di concentrazione resta definita parametricamente dalle equazioni:

$$\begin{cases} p = \frac{1}{n} \int_{c_1}^{x} f(z)\,dz \\ q = \frac{1}{m} \int_{c_1}^{x} z f(z)\,dz \end{cases} \qquad (3)$$

nelle quali si è posto

$$n = \int_{c_1}^{c_2} f(z)\,dz \,, \quad m = \int_{c_1}^{c_2} z f(z)\,dz$$

conformemente alle notazioni del numero precedente.

Da queste, derivando, si deduce l'equazione della tangente $\frac{dq}{dp} = \frac{n}{m} x$ (4) nel punto generico x. In quei punti particolari $\bar{x}$ nei quali la $f(x)$ eventualmente si annulla la (4) non è sempre giustificata. Nel caso in cui la $f(x)$ non si annulla in tutto un intorno di un punto $\bar{x}$ essa si stabilisce come equazione limite dell'equazione della tangente alla curva in un punto x sufficientemente vicino al dato, sia a destra che a sinistra di $\bar{x}$. Se invece la $f(x)$ è nulla in tutto un intorno di $\bar{x}$, si può dire che la variabile indipendente x presenta, entro il campo $c_1 c_2$, un interavllo di discontinuità : il sistema (3) consta in effetti di due sistemi, uno a sinistra, uno a destra di tale intervallo, e la curva di concentrazione è costituita da due archi successivi, con tangenti distinte nell'estremo comune. La curva presenta pertanto un punto angolare, al quale corrispondono infiniti valori del parametro x.

3) Vediamo ora come si deformi la curva di concentrazione al variare della legge di frequenza delle intensità del carattere. Supponiamo, in un primo tempo, di passare con continuità da una legge di frequenza f ad un'altra φ senza variare nè il numero n degli elementi della distribuzione, nè l'ammontare totale m del carattere da questi posseduto, nè infine gli estremi c_1 e c_2 del campo di variabilità del carattere : dalla curva di concentrazione (C_f) della prima si passa per deformazione continua a quella (C_φ) relativa alla seconda, le due curve essendo vincolate dalla condizione di avere agli estremi le stesse tangenti.

Indichiamo con x il valore della intensità del carattere.

Se le f e φ non sono identiche, esisterà, tra c_1 e c_2, qualche punto x' per il quale $\sigma = \int_{C_1}^{x'} [f(x) - \varphi(x)]\, dx \gtrless 0$.

Supponiamo risulti $\sigma(x') > 0$: esisterà certo qualche punto x'' per il quale sia $\sigma(x'') < 0$ e viceversa, poichè altrimenti si dedurrebbe $\int_{C_1}^{C_2} x\,[f(x) - \varphi(x)]\, dx \gtrless 0$ a seconda che sia $\sigma(x') \lesseqgtr 0$ contrariamente alla ipotesi $\int_{C_1}^{C_2} x\,\varphi(x) = m$. Tra due punti x', x'' esiste almeno un punto x nel quale $\sigma = 0$. Nell'intervallo $c_1 c_2$, estremi esclusi, potranno esistere uno o più di questi punti. Indichiamo con $\bar{x}$ quelli, fra gli zeri della funzione σ, che godono della

proprietà che, se si considera un loro intorno sufficientemente piccolo, essi dividono l'intervallo in due tratti tali che tutti i punti dell'uno sono punti x' e tutti quelli dell'altro sono punti x''.

Sia $\bar{x}_1$ il primo dei punti $\bar{x}$, distinto da c_1, che s'incontra sull'asse delle x, percorrendo il segmento $\overline{c_1 c_2}$ da sinistra verso destra. Sia n_1 il numero degli elementi dei due gruppi ai quali le leggi f e φ assegnano una intensità di carattere non maggiore di $\bar{x}$, e siano x' i punti dell'intervallo $c_1 \bar{x}_1$. In questa ipotesi ogni gruppo di $n' < n_1$ elementi meno dotati del carattere possiede, in complesso nella seconda distribuzione, una quantità di carattere maggiore che non nella prima: la differenza fra tali quantità corrispondenti cresce col numero degli elementi dei quali si compone il gruppo, perchè se n' di questi posseggono una quantità di carattere X_f secondo la legge di distribuzione f, e $X_\varphi > X_f$, secondo la legge φ, $n' + 1$ individui possiederanno una quantità di carattere $X_f + x_f$ secondo la prima e $X_\varphi + x_\varphi$ secondo la seconda, x_φ risultando maggiore di x_f. Pertanto nell'intervallo $c_1 \bar{x}_1$ la C_φ giace tutta al di sopra della C_f e la differenza delle ordinate delle due curve corrispondenti ad una stessa frazione del numero totale degli elementi della distribuzione cresce da c_1 a $\bar{x}_1$, nel quale punto diviene massima. Ivi le due curve hanno la stessa tangente.

Sia $\bar{x}_2$, eventualmente coincidente con c_2, il punto $\bar{x}$ successivo a $\bar{x}_1$, e sia n_2 il numero degli elementi cui spetta, sia secondo la f che secondo la φ, una intensità di carattere compresa tra $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$. Poichè all'intervallo $\bar{x}_1\ \bar{x}_2$ appartengono tutti punti x'', l'incremento dell'ammontare complessivo del carattere del gruppo di $n_1 + n''$ $(n'' < n_2)$ elementi meno dotati della distribuzione, è minore secondo la legge φ che secondo la f, al crescere del numero dei componenti del gruppo. Pertanto la differenza fra le ordinate corrispondenti della C_φ e della C_f decresce con continuità da $\bar{x}_1$ a $\bar{x}_2$, nel qual punto diviene minima. Se tale minimo è positivo la C_φ si avvicina alla C_f, senza tuttavia raggiungerla nel punto $\bar{x}_2$; se è nullo essa raggiunge la C_f in $\bar{x}_2$, colla quale acquista in tal punto un contatto del primo ordine almeno; se è negativo la C_φ attraversa la C_f in un punto (pq) che corrisponde, sulle due curve, a due diversi valori del parametro x, dei quali è minore quello relativo alla curva C_φ. Se $\bar{x}_2 \equiv c_2$ si verifica il 2° caso, se $\bar{x}_2 \neq c_2$ esiste almeno un altro punto $\bar{x}$, distinto da c_2 o coincidente con esso. Sia il 1° di questi $\bar{x}_3$. Poichè nell'intervallo $\bar{x}_2\ \bar{x}_3$ la differenze fra le ordinate corrispondenti dei punti della C_φ e della C_f cresce con x, nel 1° e nel 2° dei casi sopra con-

siderati la C_φ si allontana dalla C_f, nel 3° invece le si avvicina ed eventualmente l'interseca per un valore di $x < \bar{x}_3$.

I punti $\bar{x}$ corrispondono pertanto agli estremi degli intervalli di monotonia della funzione $\Delta q = q_\varphi - q_f$ dove q_φ e q_f indicano le ordinate della C_φ e della C_f corrispondenti ad uno stesso valore di p. Se essi sono in numero di k, distinti da c_1 e c_2, si possono distinguere gli elementi delle due distribuzioni in $k+1$ gruppi a seconda che l'intensità del carattere posseduto sia compresa tra c_1 e $\bar{x}_1$, $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2, \ldots, x_k$ e c_2. Il passaggio dalla legge f alla legge φ non altera l'entità numerica dei singoli gruppi, esso si manifesta bensì con un incremento, o una diminuzione, dell'ammontare complessivo del carattere spettante a ciascun gruppo, a seconda che nell'intervallo corrispondente ai valori delle intensità del carattere appartenenti al gruppo è Δq crescente o decrescente; l'incremento dell'ammontare del carattere del gruppo è fornito dai gruppi di destra se il corrispondente tratto della C_φ giace al di sopra della C_f, dai gruppi di sinistra se invece giace tutto al di sotto della C_f. Se si è verificato invece una diminuzione nella quantità del carattere posseduta dal gruppo, la differenza è passata ai gruppi di destra in quest'ultimo caso, ai gruppi di sinistra nel primo.

Se $k \geq 1$ sono i punti $\bar{x}$, C_f e C_φ possono avere al più $k-1$ punti distinti a comune, uno in ciascuno intervallo $\bar{x}_i\,\bar{x}_{i+1}$, qualcuno dei quali eventualmente coincidente coll'estremo destro del proprio intervallo (escluso con $\bar{x}_k$). Tali punti corrispondono ai valori ${}_f\bar{\bar{x}}_i$ sulla C_f e ${}_\varphi\bar{\bar{x}}_i$ sulla C_φ, potendosi verificare, per qualche valore dell'indice i: ${}_f\bar{\bar{x}}_i \equiv {}_\varphi\bar{\bar{x}}_i \equiv \bar{\bar{x}}_h \quad (h \geq i+1)$.

Ordinati gli elementi delle due distribuzioni in gruppi corrispondenti alle classi d'intensità del carattere $c_1\ {}_f\bar{\bar{x}}_1,\ {}_f\bar{\bar{x}}_1\ {}_f\bar{\bar{x}}_2, \ldots {}_f\bar{\bar{x}}_j\,c_2$ relativamente alla f e $c_1\ {}_\varphi\bar{\bar{x}}_1,\ {}_\varphi\bar{\bar{x}}_1\ {}_\varphi\bar{\bar{x}}_2, \ldots {}_\varphi\bar{\bar{x}}_j\,c_2$ relativamente alla φ, alle classi ${}_f\bar{\bar{x}}_i\ {}_f\bar{\bar{x}}_{i+1}$, ${}_\varphi\bar{\bar{x}}_i\ {}_\varphi\bar{\bar{x}}_{i+1}$ spetta lo stesso numero di elementi e la stessa quantità di carattere: il passaggio dalla legge f alla φ ha per effetto uno spostamento degli elementi della distribuzione dagli estremi verso il centro o dal centro verso gli estremi, alternativamente, all'interno di ciascun gruppo. Corrispondentemente la C_φ giace al di sopra e al di sotto della C_f.

Dicesi area di concentrazione l'area racchiusa tra la retta di equidistribuzione e la curva di concentrazione. Nel passaggio da una distribuzione a un'altra l'area di concentrazione cresce o diminuisce se nella nuova distribuzione prevalgono, rispetto a quella di partenza i valori estremi oppure i valori medi delle intensità del ca-

rattere, nel caso in cui le curve di concentrazione non hanno nessun punto d'intersezione; diminuisce, cresce o rimane costante a seconda che la tendenza ad addensarsi verso il centro degli elementi della distribuzione nei gruppi di posto dispari (o pari) risulta prevalere o meno, oppure uguaglia la tendenza ad addensarsi verso gli estremi degli elementi della distribuzione nei gruppi di posto pari (o dispari) nel caso in cui le curve di concentrazione abbiano qualche punto d'intersezione (oltre gli estremi).

Consideriamo ora il caso in cui il passaggio dalla legge f alla φ non si effettui senza una variazione dell'ammontare totale della intensità del carattere. Subisca questo, ad esempio, un incremento da m a m'. Il passaggio dalla f alla φ può supporsi verificato in due tempi: in un primo tempo l'aumento $m' - m$ dell'ammontare complessivo del carattere si distribuisce nei singoli elementi della distribuzione proporzionalmente alle intensità x del carattere già da questi posseduto. La curva di concentrazione relativa a tale legge intermedia f' coincide con la C_f, poichè essa attribuisce a ciascun elemento una intensità di carattere $x' = x\frac{m'}{m}$, che costituisce la stessa frazione dell'ammontare complessivo di esso che possedeva prima. La f e la f' sono sostanzialmente identiche, salvo l'unità di misura delle intensità del carattere. È il passaggio invece dalla f' alla φ che costituisce una effettiva modifica della legge di distribuzione del carattere. Se il campo di variabilità della x è per la φ $c_1\frac{m'}{m}$ $c_2\frac{m'}{m}$ (2) siamo nel caso precedente di due leggi di distri-

(2) Intendiamo dire con questo che $c_1\frac{m'}{m}$ e $c_2\frac{m'}{m}$ sono i valori estremi della intensità del carattere effettivamente assunti da qualche elemento della distribuzione. In altri termini esiste un numero $\varepsilon > 0$ tale che per tutti i valori di x compresi tra $c_1\frac{m'}{m}$ e $c_1\frac{m'}{m} + \varepsilon$, $c_2\frac{m'}{m} - \varepsilon$ e $c_2\frac{m'}{m}$ sia $\varphi(x) \neq 0$. Talvolta diremo anche campo o intervallo di definizione il campo di variabilità dei valori del carattere di una certa distribuzione. Però in generale il campo di definizione di una distribuzione può essere più ampio del suo campo di variabilità, non essendo escluso che la φ possa presentare in esso infiniti zeri costituenti un insieme continuo di misura non nulla, avente per estremo un estremo del campo. Il massimo intervallo (finito e infinito) nel quale si può definire una distribuzione è il campo di esistenza della distribuzione generica del carattere, costituito dall'insieme di tutti i valori che questo può assumere: questo costituisce pertanto anche il campo di variabilità del carattere relativamente ad una distribuzione generica.

buzione della stessa quantità di carattere definite nello stesso intervallo ; in caso contrario ci si riconduce a questo ponendo $f' = 0$, $\varphi = 0$ in ogni punto x esterno al proprio campo di variabilità. Si applicano quindi a questo caso tutte le considerazioni svolte innanzi. Una sola differenza grafica si noterà da quello a questo se gli estremi del campo di variabilità della x per la φ fossero diversi da $c_1 \frac{m'}{m}$ e $c_2 \frac{m'}{m}$, poichè la C_φ avrebbe agli estremi tangenti distinte da quelle della C_f. All'estremo sinistro il valore di tale tangente risulta maggiore o minore a seconda che il più piccolo valore x per il quale $\varphi \neq 0$ è $\gtrless c_1 \frac{m'}{m}$, e all'estremo destro a seconda che il massimo valore di x per il quale $\varphi \neq 0$ è $\gtrless c_2 \frac{m'}{m}$.

4) Abbiamo visto nel n° precedente come varii la curva di concentrazione al variare della legge di distribuzione del fenomeno. Risulta pure da quanto abbiamo già detto, e si deduce d'altronde facilmente dalla (4), che la curva di concentrazione non dipende dall'unità adottata per la misura della intensità del carattere. Vediamo ora come invece essa dipenda dal polo della distribuzione (origine delle coordinate).

Si consideri accanto alla legge di frequenza precedente $f(x)$, la $f(x - \varepsilon)$ definita in tutto il campo $c_1 + \varepsilon$, $c_2 + \varepsilon$; la quale si ottiene dalla prima con una translazione di ampiezza ε, lungo l'asse delle ascisse, nel verso positivo o negativo a seconda che è $\varepsilon \gtrless 0$. Ciò equivale ad incrementare di una quantità ε la quantità di carattere relativa ad ogni elemento della primitiva distribuzione. La legge f' che ripartisce fra gli m elementi della distribuzione f la quantità di carattere $m + n\varepsilon$ allo stesso modo di f, ammette come campo di variabilità delle x il segmento $c_1 \frac{m + n\varepsilon}{m}$ $c_2 \frac{m + n\varepsilon}{m}$, al quale risulta tutto interno il segmento $c_1 + \varepsilon$ $c_2 + \varepsilon$. La corrispondenza subordinata tra i punti di questi due segmenti dalla condizione $\int_{c_1 \frac{m+n\varepsilon}{m}}^{x'} f'(x)\, dx = \int_{c_1 \frac{m+n\varepsilon}{m}}^{x''} f(x - \varepsilon)\, dx$ è una proiettività (prodotto di una translazione per una similitudine). Poichè ogni punto $\bar{x}$ (ai quali corrispondono uguali valori di p nelle due distri-

buzioni), è un punto unito per la proiettività, esiste, tra $c_1 + \varepsilon$ e $c_2 + \varepsilon$, un solo punto $\bar{x}$ e la curva $C_{f(\varepsilon)}$ giace tutta al di sopra della curva C_f. Crescendo indefinitamente ε cresce il valore della tangente nell'estremo sinistro della curva e decresce nell'estremo destro tendendo entrambi ad 1 per $\varepsilon \to \infty$, quindi la $C_{f(\varepsilon)}$ si avvicina indefinitamente alla retta di equidistribuzione. Per $\varepsilon < 0$ la $C_{f(\varepsilon)}$ giace invece al di sotto della C_f, dalla quale si allontana al diminuire di ε. Per $\varepsilon = -c_1$ $C_{f(\varepsilon)}$ risulta tangente all'asse delle p. Se si fa decrescere ε oltre questo limite e si considera solo quella parte della distribuzione che resta a destra del valore $x = 0$, convenendo che i restanti elementi della distribuzione presentano il carattere con intensità nulla, allora la curva di concentrazione si adagia sull'asse delle p. Il punto di tangenza di tale retta colla curva si sposta sempre più a destra. La curva consta di un segmento dell'asse p, il cui estremo variabile si avvicina indefinitamente al punto (10) e di un tratto curvilineo che si avvicina al cateto $p = 1$ del triangolo (00), (10), (11), col quale si confonde quando tutto l'ammontare del carattere risulti concentrato in un elemento solo della distribuzione, essendo molto grande il numero totale degli elementi di questa.

Immaginiamo tracciata la C_f sul piano rappresentativo dei punti (pq). Se i due assi sono ortogonali e su di essi si sono scelte unità di misura uguali, il triangolo OPQ, interno al quale è la curva, è un effettivo triangolo rettangolo isoscele, come nella fig. 1. Ciascuna ordinata della curva rappresenta la frazione q del carattere totale posseduto dalla corrispondente frazione p degli elementi della distribuzione nei quali il carattere presenta la minore intensità. Se in tale rappresentazione assumiamo come unità di misura sull'asse p la ennesima parte e sull'asse q la enmesima parte della precedente, le stesse ordinate rappresenteranno invece l'ammontare mq del carattere posseduto dagli np elementi della distribuzione che ne posseggono di meno; e analogo significato ha la $C_{f(\varepsilon)}$, tracciata assumendo $\overline{OP} = 1$, $\overline{PR} = 1$, (mentre è $\overline{PR} = \dfrac{m + n\,\varepsilon}{m}\,\overline{PQ}$).

Posto quindi $\dfrac{\overline{OP}}{n} = 1$, $\dfrac{\overline{PQ}}{m} = 1$, indicati con $q_{f(\varepsilon)}$ e q_f i valori che ne risultano per due ordinate generiche delle due curve, corrispondenti allo stesso valore di np, risulta

$$q_{f(\varepsilon)} - q_f = \varepsilon\, n\, p\,.$$

Poichè $\overline{QR} = \varepsilon n$ si deduce subito che la distanza dei punti d'intersezione delle due curve con una stessa parallela all'asse $p = 0$ è uguale a quella delle intersezioni della stessa con le rette OR e OQ.

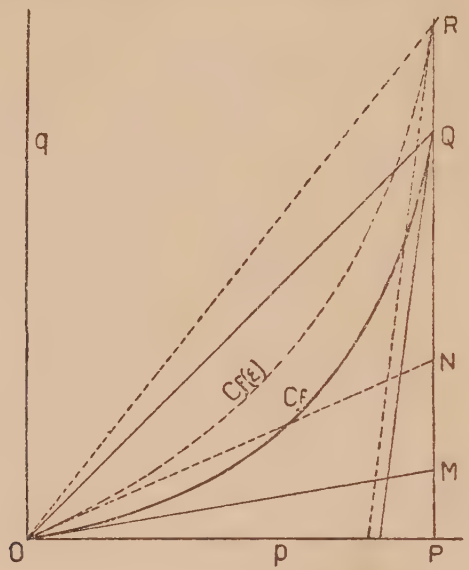


FIG. 1.

Pertanto, se si fa ruotare la retta OR intorno al punto O fino a sovrapporsi alla OQ, e il piano della $C_{f(\varepsilon)}$ con essa, imponendo alle rette $p =$ cost. di scorrere su se stesse, la $C_{f(\varepsilon)}$ risulta, al termine della rotazione, sovrapposta alla C_f. Poichè il movimento non altera le aree, si deduce che nella rappresentazione eseguita sono eguali le due aree di concentrazione e sono equivalenti i triangoli formati dalle rette OR e OQ rispettivamente con le tangenti nei punti estremi alle curve $C_{f(\varepsilon)}$ e C_f.

La rappresentazione data della C_f è quella ordinaria. Dalla rappresentazione data della $C_{f(\varepsilon)}$ invece si passa a quella ordinaria riducendo tutte le ordinate nel rapporto $\dfrac{m}{m + \varepsilon n}$, possiamo quindi concludere che:

« al variare del polo della distribuzione l'area di concentrazione « varia nel rapporto inverso della quantità totale del carattere relativo « alla distribuzione, è costante però il rapporto fra l'area di concen-

« trazione e quella del triangolo formato dalle tangenti agli estremi « della curva e dalla retta di equidistribuzione il quale costituisce un « invariante della distribuzione ».

5) Dicesi rapporto di concentrazione il rapporto dell'area di concentrazione al valore massimo che essa può raggiungere.

Poichè in nessun caso la curva di concentrazione può esorbitare dal triangolo (00), (10), (11), ma si possono pensare leggi di frequenza per le quali l'area racchiusa tra la corrispondente curva di concentrazione e i due cateti del detto triangolo sia minore di una quantità prefissata, così un primo valore del rapporto di concentrazione potrebbe ottenersi assumendo come area di massima concentrazione quella del triangolo OPQ. In tal caso, detta S l'area di concentrazione, risulterebbe $R = 2\ S$ (5). Tale valore propose il Gini nel 1914 (3). Senonchè un tale metodo non tiene conto della effettiva variabilità dell'area di concentrazione, che risulta dalla considerazione di tutte e solo le distribuzioni del carattere effettivamente possibili, ossia presuppone la ipotesi che l'ammontare totale del carattere possa concentrarsi tutto in una frazione infinitesima Δp degli elementi della distribuzione. Quindi il Gini stesso propose successivamente, per la valutazione del rapporto di concentrazione, un metodo generalizzato, da applicarsi nel caso in cui esista un limite superiore per i valori del carattere, inferiore all'ammontare totale ; e quindi il coefficiente di correzione per il quale occorre moltiplicare il doppio dell'area di concentrazione nel caso dell'esistenza sia di un limite minimo l, sia di un limite massimo L, per i valori del carattere (4). In tal caso in ogni distribuzione $f(x)$ si può sempre considerare come intervallo di variabilità della x tutto il segmento $\overline{l\,L}$, ponendo eventualmente $f(x) = 0$ per i valori del carattere compresi tra tali limiti, ma esterni al segmento $\overline{c_1\,c_2}$ entro il quale cadono tutti gli elementi della distribuzione.

Se $c_1 \equiv l$ la tangente alla C_f nel punto 0 ha il coefficiente angolare minimo compatibile con i dati limiti dell'intensità del carat-

---

(3) Cfr. C. GINI: *Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri :* « Atti del R. Istituto Veneto di S. L. A. », Anno 1913-14, Tomo LXXIII. Parte seconda, già cit.

(4) Cfr. C. GINI: « *Sul massimo degli indici di variabilità assoluta e sulle sue applicazioni agli indici di variabilità relativa e al rapporto di concentrazione* in « Metron », Vol. VIII, n. 3 1930 ; e *Intorno alle curve di concentrazione*, XX^e Session de l'Institut International de Statistique, Madrid 1931.

tere, fermi restando s'intende l'ammontare totale di questo e il numero degli elementi della distribuzione; se $c_1 \neq l$ il coefficiente angolare della tangente alla C_f in tale punto risulta maggiore di tale valore, ma il punto 0 deve ritenersi un punto singolare della C_f, al quale corrispondono infiniti valori del parametro, compresi tra l e c_1 (vedi n. 2). Ivi devono ritenersi tangenti alla curva tutte le rette del fascio di centro 0 comprese tra la effettiva tangente in 0 alla C e la retta $q = \frac{n}{m} l\, p$. Analogamente si ragioni per l'estremo Q della curva. Pertanto le rette $q = \frac{n}{m} l\, p$ (6) e $1 - q = (1 - p)\frac{n}{m} L$ (7) possono sempre ritenersi le tangenti estreme della C_f, qualunque sia la distribuzione del carattere compatibile coi dati limiti l e L. Detto R un punto generico della C_f esse rappresentano la posizione limite della tangente in R alla curva di concentrazione, per R tendente rispettivamente a P e a Q, se P e Q sono punti ordinari della C_f, in caso contrario sono esterne al triangolo formato da tali tangenti alla curva e dalla retta di equidistribuzione, costituendo le tangenti alla C_f negli estremi esterni dei due segmenti infinitesimi rappresentati dai punti P e Q. Diremo quindi che:

l'area di massima concentrazione è, per ogni distribuzione, l'area del triangolo determinato dalla retta di equidistribuzione e dalle tangenti estreme alla curva di concentrazione.

Il punto d'intersezione delle (6) e (7) corrisponde al valore di

$$p = \frac{1 - \frac{n}{m} L}{\frac{n}{m}(l - L)}.$$

Per $L = \infty$ l'area di massima concentrazione risulta $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{m} l\right)$.

Per L finito risulta $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{m} l\right)\frac{L - \frac{m}{n}}{L - l}$.

Il rapporto $\frac{m}{n}$ tra l'ammontare complessivo del carattere e il numero degli elementi della distribuzione è la intensità media del

carattere. Indicata questa con A si ha per l'area di massima concentrazione la formula del Gini: $\frac{1}{2}\left(1-\frac{l}{A}\right)\frac{L-A}{L-l}$,

che può anche scriversi: $\frac{\left(1-\frac{l}{A}\right)\left(1-\frac{A}{L}\right)}{2\left(1-\frac{l}{L}\right)}$.

Le espressioni nelle parentesi sono in generale diverse da 0, ma se una è nulla, anche le altre sono nulle; si ha in tal caso $l = A = L$, e la sola legge di ripartizione possibile è la legge di ripartizione uniforme.

6) Ferme restando le precedenti notazioni, il rapporto di concentrazione è espresso dalla formula

$$R = \frac{2A\,(L-l)}{(A-l)\,(L-A)}\,S\,. \tag{8}$$

Le conclusioni del n. 4 ci permettono di dare alla (8) una forma più espressiva. Sia ε l'intensità minima del carattere effettivamente presentata da qualche elemento della distribuzione. Se indichiamo con S_0 l'area di concentrazione relativa alla distribuzione f di polo 0 (ossia S_0 rappresenta l'area di concentrazione relativa alla distribuzione che si ottiene sottraendo a ciascun elemento della f una intensità di carattere ε), risulta $S = S_0\frac{m-n\varepsilon}{m}$,

e indicando con $A_0 = A - \varepsilon$ la intensità media del carattere relativa alla distribuzione di polo 0, questa relazione si scrive anche $S = \frac{A_0}{A}S_0$.

Sostituendo nella (8), nella quale scrivo A_ε e R_ε al posto di A e di R per mettere meglio in evidenza che tali quantità sono relative alla stessa distribuzione cui si riferisce S_0, ma di polo ε, si ha la

$$R_\varepsilon = \frac{(L-l)\,(A_\varepsilon-\varepsilon)}{(A_\varepsilon-l)\,(L-A_\varepsilon)}\,2\,S_0\,. \tag{9}$$

La (9) può interpretarsi senza far ricorso alcuno alla distribuzione f di polo 0. Infatti S_0 è la metà del rapporto dell'area di concentrazione all'area del triangolo formato dalla retta di equidistribuzione con le tangenti agli estremi della curva di concentrazione,

ed è pertanto un invariante della distribuzione. Ma invarianti della distribuzione sono anche $A_\varepsilon - \varepsilon$, che è la differenza tra il valore medio della intensità del carattere e il valore minimo effettivamente assunto da qualche elemento della distribuzione; e $L - l$, che deve intendersi come una costante del fenomeno. Il prodotto di questi fattori costituisce una costante della distribuzione. Quindi se il carattere è limitato, il rapporto di concentrazione relativo ad una certa distribuzione è, al variare del polo, inversamente proporzionale al rettangolo della distanza della media aritmetica della distribuzione dagli estremi del campo di variabilità del carattere. Pertanto esso è minimo quando $A = \frac{L + l}{2}$.

Se il carattere è illimitato superiormente, facendo tendere L all'infinito nella (9), si ottiene $R_\varepsilon = 2 \frac{A_\varepsilon - \varepsilon}{A_\varepsilon - l} S_0$. (10). cioè: nella ipotesi che il carattere possa presentare intensità comunque grandi il rapporto di concentrazione è proporzionale al rapporto delle distanze della media aritmetica della distribuzione dalla intensità minima che presenta il carattere di questa, e dal valore minimo che esso può assumere.

Se qualche elemento della distribuzione presenta effettivamente la intensità teorica minima del carattere (cioè se $\varepsilon = l$), si ottiene la (7): $R_l = 2 S_0$ come caso particolare della (8).

Ho finora indicato con la denominazione « polo della distribuzione » l'origine delle coordinate. Ma nello studio della concentrazione dei caratteri la distanza della curva di frequenza dall'origine dà luogo a considerazioni d'importanza affatto secondaria. Giova definire in tali questioni, come polo della distribuzione invece quel punto dell'asse x che corrisponde al valore minimo l che può assumere l'intensità del carattere, e come distanza della distribuzione f dal polo $\varepsilon - l$, cioè la distanza dal polo dell'estremo sinistro del campo di variabilità del carattere nella distribuzione. Potremo quindi dire che: « *il rapporto di concentrazione dipende unicamente dalla forma « della curva di frequenza del carattere e dalla sua distanza dal polo* » (5).

---

(5) Non si comprende l'affermazione dell'Amoroso che la concentrazione dei redditi varia al variare del metro di questi, contenuta in *Ricerche intorno alla curva dei redditi*, « Annali di matematica », Serie IV, Tomo II (1924-25). Il rapporto di concentrazione è in realtà un puro numero, di dimensione 0. Ed è evidente che presenterebbe un interesse molto ridotto se non fosse tale,

Diremo nel seguito distribuzione di polo k una distribuzione che abbia distanza k dal polo.

7) Se si pone l'origine delle coordinate nel polo della distribuzione la (9) si scrive

$$R_\varepsilon = \frac{2\,S_o}{1 - \dfrac{A_\varepsilon}{L}} \frac{A_o}{A_\varepsilon} \qquad (11)$$

Ricordando che è $S_o = S_\eta \dfrac{A_\eta}{A_o}$

---

e fornisse, ad es., tre misure diverse della concentrazione attuale dei redditi in Italia, a seconda che questi fossero espressi in lire-oro, lire-merci, lire-carta.

In questo stesso lavoro, che è anteriore alle ricerche del Gini « Sul massimo degli indici di variabilità assoluta e sulle sue applicazioni agli indici di variabilità relativa e al rapporto di concentrazione » e « Intorno alle curve di concentrazione », l'Amoroso, pure ammettendo che nel fatto i redditi non discendono al disotto di un valore minimo h, ha assunto come definizione del rapporto di concentrazione la (5). Questa formula è esatta se, come implicitamente pare ammetta l'A., si assume che il reddito minimo possibile sia $= O$, e si riguarda pertanto come polo della distribuzione, nel senso sopra definito, l'origine dellle coordinate.

Ma sorge il dubbio se, in ricerche sulla distribuzione della ricchezza di natura prevalentemente statica, cioè tendenti ad accertare il grado di concentrazione dei redditi, ad esempio, in un certo paese in un certo tempo, non sia piuttosto conveniente assumere come polo della distribuzione quel reddito minimo h — corrispondente allo stretto necessario per non morire — che è il limite inferiore dei valori del reddito degli elementi della distribuzione. Poichè a me pare che si debba ammettere che, se anche nel passaggio da un distribuzione f ad una φ il reddito di alcuni elementi della popolazione assuma valori inferiori ad h, tali individui vengono automaticamente eliminati da questa e il limite inferiore dei valori dei redditi effettivamente goduti dagli elementi della distribuzione ritorna ad essere h. Se h varia al variare della distribuzione (e possiamo intendere, per fissare le idee che questa vari in funzione del tempo) si intenderanno eliminati al tempo t tutti quegli individui il cui reddito risultasse inferiore ad $h\,(t)$.

Pertanto la considerazione dei redditi inferiori ad h, che può essere di rilevante importanza nella dinamica della distribuzione dei redditi, non ha nessun interesse dal punto di vista statico, perchè in condizioni di equilibrio non sono possibili quelle distribuzioni nelle quali il reddito assuma valori inferiori ad h. Nei riguardi di tali indagini quindi si può anche dire che il rapporto di concentrazione dipende unicamente dalla forma della curva dei redditi, ed è espresso dalla formula:

$$R = 2\,S_h \frac{A_h}{A_o} = 2\,S_o\,.$$

e sostituendo nella (11) si ottiene la

$$R_\varepsilon = \frac{2\,S_\eta}{1 - \dfrac{A_\varepsilon}{L}} \frac{A_\eta}{A_\varepsilon} \qquad (12)$$

la quale presenta, rispetto alla (11), il vantaggio di esprimere il valore del rapporto di concentrazione relativo alla distribuzione di polo ε in funzione dell'area di concentrazione relativa alla distribuzione di polo generico η, sicchè *il valore di* R *per una distribuzione* f *generica si può trarre da quello relativo ad una distribuzione particolare per la quale il calcolo riesca più semplice.*

Supporremo sempre nel seguito che il carattere sia illimitato superiormente, sicchè la (12) si riduce a

$$R_\varepsilon = 2\,S_\eta \frac{A_\eta}{A_\varepsilon} \qquad (13), \qquad \text{e anche } R_\varepsilon = R_\eta \frac{A_\eta}{A_\varepsilon} \qquad (14),$$

poichè $R_\eta = 2\,S_\eta$.

Se in una distribuzione f c_1 e c_2 sono i valori minimo e massimo che presenta la intensità x del carattere, diciamo complementari due valori x_1 e x_2 tali che $x_1 - c_1 = c_2 - x_2$. Indichiamo con $\bar{f}$ la distri-

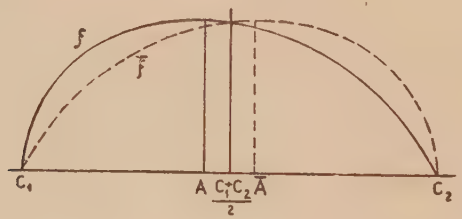


Fig. 2.

buzione che attribuisce a ciascun valore del carattere la frequenza assegnata dalla f al valore complementare. La $\bar{f}$ è quindi la simmetrica della f rispetto all'asse del segmento $c_1 - c_2$. La stessa relazione (14) intercede tra i valori R e $\bar{R}$ dei rapporti di concentrazione di due distribuzioni f e $\bar{f}$.

Se $y = f(x)$ è l'equazione della distribuzione f, $y = f(c_1 + c_2 - x)$ è l'equazione della distribuzione $\bar{f}$.

Dalle equazioni parametriche della curva di concentrazione relativa alla $\bar{f}$:

$$\begin{cases} \overline{np}(x) = \int_{c_1}^{x} f\,(c_1 + c_2 - z)\,dz \\ \overline{mq}(x) = \int_{c_1}^{x} z\,f\,(c_1 + c_2 - z)\,dz\,, \end{cases}$$

osservato che alla f e alla $\bar{f}$ compete lo stesso numero totale di elementi, quindi $\overline{n} = n$, e che le medie aritmetiche del valore del carattere nelle due distribuzioni risultano simmetriche rispetto al punto medio del segmento $c_1 - c_2$, cioè $\overline{A} = c_1 + c_2 - A$, e quindi $\overline{m} = n\,(c_1 + c_2) - m$, e posto $\xi = c_1 + c_2 - x$, si traggono facilmente le relazioni

$$\begin{cases} \bar{p}\,(x) = 1 - p\,(\xi) \\ \bar{q}\,(x) = \dfrac{n\,(c_1 + c_2)\,[1 - p\,(\xi)] - m\,[1 - q\,(\xi)]}{n\,(c_1 + c_2) - m} \end{cases}$$

le quali esprimono i punti della $\overline{C}$ in funzione dei punti della C.

Il doppio dell'area di concentrazione della $\bar{f}$, che esprime, nel nostro caso, anche il valore del rapporto di concentrazione, è $\int_0^1 \bar{p}\,d\bar{q} - \bar{q}\,d\bar{p}$ e quindi

$$[n\,(c_1 + c_2) - m]\,\overline{R} = -\int_0^1 (1 - p)\,[-n\,(c_1 + c_2)\,dp + m\,dq] +$$

$$+ [n\,(c_1 + c_2)\,(1 - p) - m\,(1 - q)]\,dp = -m\int_0^1 (1 - p)\,dq - (1 - q)\,dp =$$

$$= m\int_0^1 p\,dq - q\,dp + [q - p]_1^0 = m\,R\,.$$

Si ottiene pertanto la relazione $\overline{R} = \dfrac{m}{n\,(c_1 + c_2) - m}\,R$, la quale sotto la forma $\overline{R} = R\,\dfrac{A}{\overline{A}}$ esprime il seguente TEOREMA: *data una distribubuzione* f *di polo* P, *il rapporto di concentrazione della distribuzione* $\bar{f}$ *è uguale a quello di una distribuzione* f *di polo* P′ *la cui distanza da* P *è uguale, in valore assoluto e segno, al doppio della distanza del centro dell'intervallo di variabilità del carattere nella distribuzione dalla media aritmetica di questa.*

Da cui discende come corollario: *due distribuzioni simmetriche rispetto alla media aritmetica hanno rapporti di concentrazione uguali* (6).

II.

Determinazione analitica delle curve di concentrazione relative a vari tipi di distribuzione, e calcolo del rapporto di concentrazione.

8) Passiamo ora alla determinazione analitica delle curve e dei rapporti di concentrazione relativi a vari tipi di distribuzione.

Consideriamo anzitutto il caso in cui ogni valore del carattere presenti la stessa frequenza. La distribuzione è rappresentata da un segmento rettilineo parallelo all'asse delle ascisse, limitatamente all'intervallo $c_1\, c_2$. Detta a la frequenza costante della distribuzione risulta:

$$n = a\,(c_2 - c_1)\ ,\ m = \frac{a}{2}\,(c_2^2 - c_1^2) \qquad \text{e quindi}$$

$$\begin{cases} p\,(x) = \dfrac{x - c_1}{c_2 - c_1} \\ q\,(x) = \dfrac{x - c_1^2}{c_2^2 - c_1^2} \text{ da cui } q = \dfrac{1}{c_2^2 - c_1^2}\left\{[(c_2 - c_1)\,p + c_1]^2 - c_1^2\right\}. \end{cases} \quad (15)$$

La curva di concentrazione è pertanto un arco della parabola (15), di vertice $\left(-\dfrac{c_1}{c_2 - c_1}\ ,\ \dfrac{-c_1^2}{c_2^2 - c_1^2}\right)$ con concavità rivolta verso l'alto. Se $c_1 = 0$ il vertice cade nel punto 0 e la C diventa tangente all'asse delle p; se $c_1 = c_2$ posta la (15) sotto la forma:

$$q = p\left(\frac{c_1 - c_2}{c_2 + c_1}\,p + \frac{2\,c_1}{c_2 + c_1}\right)$$

si vede che la parabola degenera in due rette, quella all'infinito e la retta $q = p$, e identicamente per c_1 e c_2 tendenti all'infinito.

---

(6) Se si pone R sotto la forma $R = \dfrac{\Delta_R}{2A}$ quest'ultima proposizione è immediata e da essa discende il teorema ora enunciato. Ma per le relazioni del rapporto di concentrazione cogli indici di variabilità della distribuzione vedi C. Gini: *Sulla misura della concentrazione*, ecc.; *Sul massimo degli indici di variabilità assoluta*, ecc. già citati, e G. Pietra: *Delle relazioni tra gli indici di variabilità*, nota 1ª, in « Atti del R. Istituto Veneto di S. L. A. », 1914-15, Tomo LXXIV, Parte II.

Il valore del rapporto di concentrazione risulta

$$R = \frac{1}{(c_2 - c_1)^2 (c_2 + c_1)} \int_{c_1}^{c_2} [(x - c_1)\, 2\, x - (x^2 - c_1^2)]\, d\, x =$$

$$= \frac{1}{(c_2 - c_1)^2 (c_2 + c_1)} \int_{c_1}^{c_2} (x - c_1)^2\, d\, x$$

cioè

$$R = \frac{1}{3} \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} . \qquad (16)$$

Ponendo $c_1 = 0$ si ottiene per l'invariante della distribuzione il valore $1/3$.

9) Una interessante generalizzazione del caso precedente si ha quando, suddiviso il segmento $c_1\, c_2$ in intervalli parziali, si attribuisce la stessa frequenza a tutti i valori del carattere appartenenti ad uno stesso intervallo, ma frequenze diverse ai valori del carattere appartenenti a intervalli successivi: la distribuzione assume la forma di un istogramma e si presenta in statistica quando si attribuisce la stessa frequenza, ad esempio la frequenza media, ai valori di ciascuna classe del carattere.

Non si toglie generalità alla trattazione se si considerano uguali gli intervalli parziali, se si suppone che possano essere uguali le frequenze di due o più intervalli successivi.

Se si pone $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, al quale caso ci si può sempre ridurre con una translazione del polo ed un cambiamento dell'unità di misura delle intensità del carattere, e si indica con a_{i+1} la frequenza dei valori del carattere compresi tra $\frac{i}{k}$ e $\frac{i+1}{k}$, $(i = 0, 1, \ldots k - 1)$ essendo k il numero delle classi della distribuzione, le coordinate di un punto generico della curva di concentrazione, appartenente all'intervallo $\frac{i}{k}\ \frac{i+1}{k}$ risultano espresse dalle formule:

$$\begin{cases} p\,(x) = \dfrac{1}{n} \left\{ \dfrac{\sum_1^i{}_h\, a_h}{k} + \left(x - \dfrac{i}{k}\right) a_{i+1} \right\} \\ q\,(x) = \dfrac{1}{m} \left\{ \dfrac{\sum_1^h{}_h\, (2h - 1)\, a_h}{2\, k^2} + \left(x^2 - \dfrac{i^2}{k^2}\right) \dfrac{a_{i+1}}{2} \right\} \end{cases} \qquad (17)$$

nelle quali si deve porre: $n = \frac{1}{k} \sum_1^k{}_h a_h$, $m = \frac{1}{2k^2} \sum_1^k{}_h (2h-1) a_h$.

Se operiamo un cambiamento di coordinate, ponendo:

$$\begin{cases} p^{(i)} = p + \frac{1}{nk} \sum_1^i{}_h (a_{i+1} - a_h) \\ q^{(i)} = q + \frac{1}{2mk^2} \sum_1^i{}_h (2h-1)(a_{i+1} - a_h) \end{cases} \tag{18}$$

le (17) diventano:

$$\begin{cases} p^{(i)} = \frac{a_{i+1}}{n} x \\ q^{(i)} = \frac{a_{i+1}}{2m} x^2 \end{cases}$$

e da queste si trae $$q^{(i)} = \frac{n^2}{2m a_{i+1}} p^{(i)2}, \tag{19}$$

cui va unita la condizione $\frac{a_{i+1}}{kn} i \leq p^{(i)} \leq \frac{a_{i+1}}{kn} (i+1)$.

Dalla (19), derivando rispetto a $p^{(i)}$ si ottiene:

$$\frac{dq^{(i)}}{dp^{(i)}} = \frac{n^2}{m a_{i+1}} p^{(i)} = \frac{n}{m} x, \quad \frac{d^2 q^{(i)}}{dp^{(i)2}} = \frac{n^2}{m a_{i+1}},$$

quindi possiamo dire:
« la curva di concentrazione relativa ad un istogramma si compone di tanti archi consecutivi di parabole del 2° ordine quante sono le classi della distribuzione; gli estremi di ciascun arco corrispondono ai valori minimo e massimo del carattere in ciascuna classe, e le due parabole che passano per ciascun estremo hanno in esso un contatto del 1° ordine, essendo interna quella che corrisponde alla classe meno numerosa ».

Pertanto, *se si fa tendere a 0 l'ampiezza di ciascun intervallo* entro il quale il carattere presenta la stessa frequenza e si assegna la legge di variabilità delle frequenze in funzione delle intensità del carattere, *si ottiene la curva di concentrazione relativa ad una distribuzione qualsiasi come inviluppo di un sistema di parabole del 2° ordine, ad assi paralleli.*

Per il calcolo del rapporto di concentrazione valutiamo l'area racchiusa fra ciascun arco di parabola, le ordinate negli estremi e l'asse delle p.

Se indichiamo rispettivamente con p_i e $p_i^{(i)}$, q_i e $q_i^{(i)}$, p_{i+1} e $p_{i+1}^{(i)}$, q_{i+1} e $q_{i+1}^{(i)}$ le ascisse e le ordinate degli estremi dell'arco della curva di

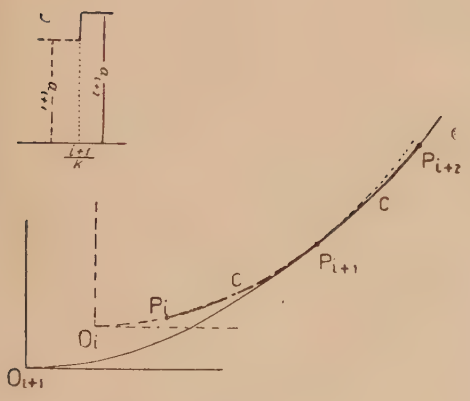


FIG. 3.

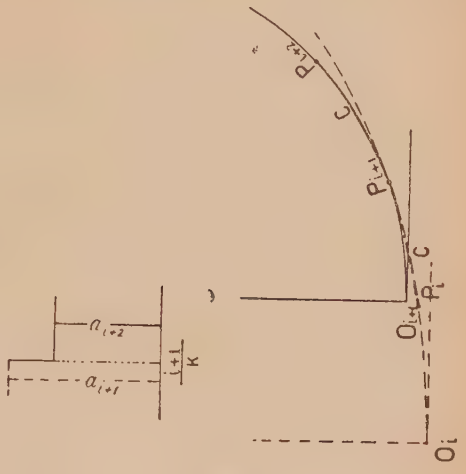


FIG. 4.

concentrazione corrispondente alla classe $i.^{esima}$ della distribuzione, riferite una volta agli assi p e q della curva e un'altra agli assi $p^{(i)}$ e $q^{(i)}$ della parabola cui appartiene l'arco, risulta:

$$\left.\begin{aligned} p &= p^{(i)} + (p_i - p_i^{(i)}) \\ q &= q^{(i)} + (q_i - q_i^{(i)}) \end{aligned}\right\} \text{ e quindi } \int_{p_i}^{p_{i+1}} q\,dp = \int_{p_i^{(i)}}^{p_{i+1}^{(i)}} q^{(i)}\,dp^{(i)} + (q_i - q_i^{(i)})\,(p_{i+1}^{(i)} - p_i^{(i)}).$$

Sostituendo a $p^{(i)}$ e a $q^{(i)}$ le loro espressioni in funzione di x:

$$\int_{p_i^{(i)}}^{p_{i+1}^{(i)}} q^{(i)}\,dp^{(i)} = \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} \frac{a_{i+1}^2}{2mn}\,x^2\,dx = \frac{1}{6}\,\frac{a_{i+1}^2}{mnk^3}\,(3i^2 + 3i + 1)$$

e dalle (18), facendo $p = p_i$, $q = q_i$ e quindi $p^{(i)} = p_i^{(i)}$, $q^{(i)} = q_i^{(i)}$,

e inoltre $p = p_{i+1}$, $p^{(i)} = p^{(i)}_{i+1}$, si ottiene :

$$\left\{ \begin{aligned} (q_i - q_i^{(i)})\,(p^{(i)}_{i+1} - p^{(i)}_i) &= -\frac{a_{i+1}}{2\,m\,n\,k^3} \sum_1^i{}_h\,(2h-1)\,(a_{i+1} - a_h) = \\ &= \frac{a_{i+1}}{2\,m\,n\,k^3}\left[-i^2\,a_{i+1} + \sum_1^i{}_h\,2h-1)\,a_h \right]. \end{aligned} \right.$$

Si ha quindi :

$$\int_{p_i}^{p_{i+1}} q\,d\,p = \frac{1}{6\,m\,n\,k^3}\left\{ (3\,i+1)\,a^2_{i+1} + 3\,a_{i+1} \sum_1^i{}_h\,(2h-1)\,a_h \right\}.$$

Sommando rispetto ai valori dell'indice i da 0 a $n-1$ si ha :

$$\frac{1}{2} - S = \frac{1}{6\,m\,n\,k^3}\left\{ \sum_1^{k-1}{}_i\,(3\,i+1)\,a^2_{i+1} + 3 \sum_1^{k-1}{}_i\,a_{i+1} \sum_1^i{}_h\,(2h-1)\,a_h \right\}$$

dalla quale, sostituiti ad m e ad n le loro espressioni, si ha per il rapporto di concentrazione la formula :

$$R = 1 - \frac{2}{3}\,\frac{\sum_1^{k-1}{}_i\,(3\,i+1)\,a^2_{i+1} + 3 \sum_1^{k-1}{}_i\,(2\,i-1)\,a_i \sum_{i+1}^k{}_h\,a_h}{\sum_1^k\,(2\,i-1)\,a_i \sum_1^k{}_i\,a_i} \qquad (20)$$

che vale per una distribuzione di polo 0 per la quale sia stato assunto come unitario l'intervallo di definizione.

Nel caso generale di una distribuzione di polo c_1 con un intervallo di definizione $\overline{c_1\,c_2}$ la (20) va moltiplicata per un coefficiente di proporzionalità, il quale si calcola osservando che tale distribuzione si ottiene da quella considerata con una translazione del polo verso sinistra, di ampiezza $\dfrac{c_1}{c_2 - c_1}$, e assumendo come unità di misura $\dfrac{1}{c_2 - c_1}$.

Il coefficiente di proporzionalità risulta pertanto uguale a

$$\frac{\dfrac{m}{n}}{\dfrac{m}{n} + \dfrac{c_i}{c_2 - c_1}} = \frac{m\,(c_2 - c_1)}{m\,(c_2 - c_1) + n\,c_1} = \frac{(c_2 - c_1) \sum_1^k\,(2\,i-1)\,a_i}{(c_2 - c_1) \sum_1^k{}_i\,(2\,i-1)\,a_i + 2\,k\,c_1 \sum_1^k{}_i\,a_i} \qquad (21)$$

Dalle (20) e (21) si trae come caso particolare la (16). Infatti posto $k = 1$, $a_1 = a$ risulta per la (20) il valore 1/3 e per la (21) il valore $\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$, donde la (16).

10) Consideriamo ora il caso di una distribuzione lineare

$$f(x) = a\,x + b\,.$$

Se supponiamo che la retta $y = a\,x + b$ passi per il polo della distribuzione dovrà porsi $b = 0$. Consideriamo al solito la distribuzione nell'intervallo $c_1\ c_2$. Poichè a è una costante moltiplicativa, la quale non influisce sulla forma della curva di concentrazione, si ponga pure $a = 1$. La f si riduce al tratto della bisettrice del 1° quadrante compreso tra i punti d'intersezione con le parallele all'asse della y dagli estremi dell'intervallo $c_1\ c_2$. In tale intervallo tutte le distribuzioni lineari distinte (che non differiscono unicamente per una costante moltiplicativa) si ottengono dalla f per translazione del polo, o per ribaltamento intorno all'asse del segmento $c_1\ c_2$, ma un ribaltamento equivale ad una translazione, quindi:

« *Il rapporto di concentrazione di una distribuzione lineare non dipende dalla inclinazione della retta, ma dalla distanza della sua intersezione con l'asse* x *dal polo* (7).

---

(7) Ad una ben diversa conclusione è giunto il GUMBEL in un suo studio: *Das Konzentrationsmass* pubblicato in « Allgemeines Statistisches Archiv », Bd. 18, H. 2, 1928. Ma l'A. è ivi incorso in errore, perchè allo scopo di rendere uguale ad uno il numero degli elementi della distribuzione ha determinato la costante addittiva b come funzione di a, c_1 e c_2. E così facendo egli ha operato una traslazione della retta parallelamente a sé stessa, ed ha quindi alterato il valore del rapporto di concentrazione. La formula cui egli è pervenuto non può essere correttamente riferita alla rete ∞^2 delle rette del piano, bensì al fascio di centro $\left(\frac{c_1 + c_2}{2}, \frac{1}{c_2 - c_1}\right)$, (escluse le rette del fascio che intersecano l'asse delle x in un punto interno al seguente $c_1\ c_2$, che non rappresentano distribuzioni possibili), tutte le rette del quale soddisfano alla condizione $\int_{c_1}^{c_2} f\,dx = 1$, come facilmente si verifica. Il rapporto di concentrazione varia al variare delle rette del fascio, quindi è logico che nella formula compaia il parametro del fascio, ma questo non ha perciò un significato geometrico di particolare importanza. Assumendo per esempio come parametro α la differenza tra il segmento staccato dalla retta sull'asse delle ordinate e l'asse della distri-

Consideriamo pertanto la distribuzione di polo c_1 rappresentata dalla equazione $y = x$ nell'intervallo $c_1\ c_2$. Le coordinate del punto generico della curva di concentrazione sono espresse dal sistema:

$$\begin{cases} p = \dfrac{1}{2n}(x^2 - c_1^2) \\ q = \dfrac{1}{3m}(x^3 - c_1^3) \end{cases} \quad \text{ove } n = \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) \text{ e } m = \frac{1}{3}(c_2^3 - c_1^3).$$

Eliminando il parametro tra le due espressioni si ottiene l'equazione della curva di concentrazione

$$q = \frac{1}{c_2^3 - c_1^3}\left\{\left[(c_2^2 - c_1^2)\,p + c_1^2\right]^{\frac{3}{2}} - c_1^3\right\}, \tag{22}$$

la quale, riferita agli assi

$$\begin{cases} p' = (c_2^2 - c_1^2)\,p + c_1^2 \\ q' = (c_2^3 - c_1^3)\,q + c_1^3 \end{cases}$$ acquista la forma semplice

$$q'^2 = p'^3.$$

Per $c_1 = 0$ i due sistemi di riferimento coincidono e la (22) porta la cuspide nell'origine.

Eseguiamo il calcolo del rapporto di concentrazione. Si ha:

$$R = \int_0^1 p\,dq - q\,dp = \frac{1}{6nm}\int_{c_1}^{c_2}[(x^2 - c_1^2)\,3x^2 - (x^3 - c_1^3)\,2x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{6nm}\int_{c_1}^{c_2}(x^4 - 3c_1^2x^2 + 2c_1^3x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{6nm}\left[\frac{1}{5}(c_2^5 - c_1^5) - c_1^2(c_2^3 - c_1^3) + c_1^3(c_2^2 - c_1^2)\right] =$$

---

buzione (ordinata del punto medio), dalla (71) di Gumbel si deduce l'altra

$$R = \frac{1}{5}\,\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}\,\frac{5(c_2 + c_1)^2 - \alpha^2(c_2 - c_1)^4}{3(c_2 + c_1)^2 - \alpha(c_2 - c_1)^3},$$

in base alla quale si potrebbe concludere che il rapporto di concentrazione dipende solo da α, c_1 e c_2. Cambiando cioè il parametro si può variare all'infinito l'enunciato della proposizione di Gumbel, senza per questo dire altro che il rapporto di concentrazione varia al variare delle rette del fascio.

$$= \frac{c_2^5 - c_1^5 - 5\,c_1^2 c_2^2 (c_2 - c_1)}{5\,(c_2^3 - c_1^3)\,(c_2^2 - c_1^2)} = \frac{c_2^4 + c_2^3 c_1 - 4\,c_2^2 c_1^2 + c_2 c_1^3 + c_1^4}{5\,(c_2^2 + c_2 c_1 + c_1^2)\,(c_2^2 - c_1^2)} =$$

$$= \frac{c_2 c_1 (c_2 - c_1)^2 + (c_2^2 - c_1^2)^2}{5\,(c_2^2 + c_2 c_1 + c_1^2)\,(c_2^2 - c_1^2)} = \frac{c_2 - c_1}{5\,(c_2 + c_1)} \cdot \frac{c_1 c_2 + (c_2 + c_1)^2}{c_2^2 + c_2 c_1 + c_1^2}.$$

Dividendo numeratore e denominatore per c_2^3 e ponendo $h = \frac{c_1}{c_2}$

si ha $$R = \frac{1 - h}{5\,(1 + h)} \cdot \frac{h + (1 + h)^2}{1 + h + h^2} \qquad (23)$$

la quale si enuncia:

« Se la retta $ax + b$ passa per il polo della distribuzione il rapporto di concentrazione dipende dal rapporto delle distanze degli estremi dell'intervallo $c_1\ c_2$ dal polo.

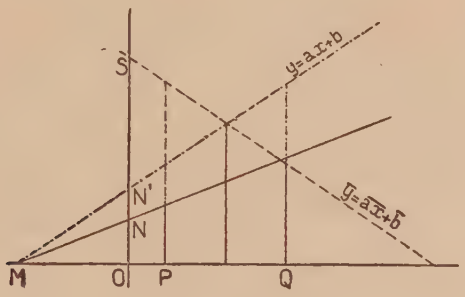


Fig. 5.

Se la retta $a\,x + b$ non passa pel polo è certamente $b \neq 0$. Posto $\varepsilon = -\frac{b}{a}$ risulta, in valore assoluto e segno $\varepsilon = \overline{OM}$, cioè ε è la distanza dal polo del punto d'intersezione della $y = f(x)$ coll'asse x. Il valore del rapporto di concentrazione in questo caso si ottiene dalla (23) moltiplicando per il rapporto $\frac{A_0}{A_\varepsilon}$ ove

$$A_0 = \frac{2}{3} \frac{c_2^3 - c_1^3}{c_2^2 - c_1^2} = \frac{2}{3} \frac{1 + h + h^2}{1 - h^2} (c_2 - c_1)$$

$$A_\varepsilon = A_0 + \varepsilon = \frac{2\,(c_2 - c_1)\,(1 + h + h^2) + 3\,\varepsilon\,(1 - h^2)}{3\,(1 - h^2)}$$

dove h ha il significato chiarito innanzi di $\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}$ e quindi $h = \frac{c_1 - \varepsilon}{c_2 - \varepsilon}$.

Pertanto si ottiene

$$R = \frac{1 - h}{5(1+h)} \frac{h + (1+h)^2}{1 + h + h^2} \frac{2(1 + h + h^2)(c_2 - c_1)}{2(c_2 - c_1)(1 + h + h^2) + 3\varepsilon(1 - h^2)} =$$

$$= \frac{2(c_2 - c_1)}{5(1+h)} \frac{(1-h)[h + (1+h)^2]}{2(c_2 - c_1)(1 + h + h^2) + 3\varepsilon(1 - h^2)} . \qquad (24)$$

La (24) è affatto generale. Per dimostrarla per $a < 0$ consideriamo la distribuzione $\bar{f}$. La sua media aritmetica è $c_1 + c_2 - A_\varepsilon = c_1 + c_2 - \varepsilon - A_0$. Poichè $c_1 + c_2 - \varepsilon$ è l'ascissa del punto R nel quale la $\bar{f} = \bar{a}x + \bar{b}$ interseca l'asse x, possiamo porre $\bar{\varepsilon} = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = c_1 + c_2 - \varepsilon$ dove $\bar{\varepsilon}$ ha lo stesso significato di ε nel caso $a > 0$.

Il valore del rapporto di concentrazione della $\bar{f}$ si ottiene quindi dalla (24) moltiplicando il secondo membro per $\frac{A_\varepsilon}{\varepsilon - A_0}$, oppure la (23) per $-\frac{A_0}{A_0 - \varepsilon}$. Eseguito il prodotto si ottiene quindi per R la stessa espressione (24) cambiata di segno, nella quale al posto di ε è scritto $-\bar{\varepsilon}$. Inoltre è

$$h = \frac{c_1 - \varepsilon}{c_2 - \varepsilon} = \frac{c_2 - \bar{\varepsilon}}{c_1 - \bar{\varepsilon}} = \frac{1}{\bar{h}} :$$

$\bar{h}$ ha lo stesso significato di h nel caso precedente, poichè è $\bar{h} = \frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}$.

La formula pertanto si riduce alla (24) moltiplicando numeratore e denominatore per $\frac{1}{h^3}$.

Esaminiamo quale forma assuma la (24) per speciali valori dei parametri.

Per h generico si ottiene l'invariante della distribuzione ponendo $c_1 = 0$: in tal caso h risulta espresso dalla formula $h = -\frac{\varepsilon}{c_2 - \varepsilon}$.

Se invece si pone. $\varepsilon = 0$ la (24) si riduce alla espressione (23). Il rapporto di concentrazione diventa indipendente dall'ampiezza dell'intervallo $c_1\, c_2$, perchè una variazione di tale intervallo che

lasci h costante equivale ad un cambiamento dell'unità di misura sull'asse delle x.

Per $h = 0$ risulta $c_1 = \varepsilon$, ciò che richede $\varepsilon \geq 0$. Se $\varepsilon \neq 0$ la distribuzione si riduce al triangolo $(c_1, 0)$, $(c_2, 0)$, $(c_2, a\,c_2 + b)$; e il rapporto di concentrazione è espresso dalla formula

$$R = \frac{2\,(c_2 - c_1)}{5\,(2\,c_2 + c_1)} \tag{25}$$

Se $\varepsilon = 0$ un vertice del triangolo cade nell'origine e il rapporto di concentrazione vale 1/5.

Per $h = 1$ gli estremi dell'intervallo $c_1\,c_2$ coincidono, e allora risulta $R = 0$, oppure $\varepsilon = \infty$, e in tal caso conviene porre la (24) sotto la forma

$$R = \frac{2\,(c_2 - c_1)}{5\,(1 + h)} \cdot \frac{h + (1 + h)^2}{2\,(1 + h + h^2)\,c_2 + \dfrac{\varepsilon}{c_2 - \varepsilon}\,(c_2 - c_1)\,(1 + 2\,h)}.$$

Il limite di questa per $h = 1$ e $\varepsilon \to \infty$ è $R = 1/3$ come già sapevamo.

Per $h = \infty$ risulta $c_2 = \varepsilon$ ciò che esige $\varepsilon > 0$. La distribuzione si riduce ad un triangolo come nel caso $h = 0$, ma con l'angolo retto in c_2 anzichè in c_1, e la (24) fornisce per R il valore $R = \dfrac{2\,(c_2 - c_1)}{5\,(c_2 + 2\,c_1)}$. A parte il segno essa si dedurrebbe dalla (25) scambiando i valori di c_1 e c_2. Per $c_1 = 0$ si ha $R = 2/5$.

11) Una generalizzazione del caso precedente si ha quando la curva di frequenza della distribuzione è una spezzata. Questo caso si presenta in statistica quando, essendo raggruppati in classi i valori del carattere e conoscendo solo la frequenza media dei valori di ciascuna classe, per ottenere una maggiore approssimazione si suppone che la legge di variabilità delle frequenze in ciascuna classe sia lineare.

Assumeremo anche in questo caso, per semplicità, come unitario l'intervallo in cui è definita la f, e uguali le singole classi. Sia $y_i = a_i\,x + b_i$ l'equazione della f relativamente alla classe i^{esima}, alla quale appartengono i valori e il carattere che soddisfano alla limitazione $\dfrac{i-1}{k} \leq x \leq \dfrac{i}{k}$.

I parametri di due rette successive della f soddisfano eventual-

mente alla relazione $a_i \frac{i}{k} + b_i = a_{i+1} \frac{i}{k} + b_{i+1} \supset \frac{b_{i+1} - b_i}{a_{i+1} - a_i} = -\frac{i}{k}$,

che esprime la condizione di passaggio delle due rette per uno stesso punto della $x = \frac{i}{k}$: in caso contrario la spezzata presenterebbe dei tratti verticali paralleli all'asse delle y ; e quindi la f delle discontinuità, la qual cosa non ha peso nelle nostre considerazioni.

L'ascissa del punto generico della curva di concentrazione corrispondente al valore x del carattere appartenente alla classe $i+1^{esima}$ è

$$p(x) = \frac{1}{n}\int_0^x y\,dx = \frac{1}{n}\sum_1^i{}_h \int_{\frac{h-1}{k}}^{\frac{h}{k}} (a_h x + b_h)\,dx + \frac{1}{n}\int_{\frac{i}{k}}^{x} (a_{i+1} x + b_{i+1})\,dx =$$

$$= \frac{1}{nk^2}\sum_1^i{}_h \frac{h^2 - (h-1)^2}{2} a_h + \frac{1}{nk}\sum_1^i{}_h b_h + \frac{1}{2n} a_{i+1}\left(x^2 - \frac{i^2}{k^2}\right) + \frac{1}{n} b_{i+1}\left(x - \frac{i}{k}\right) =$$

$$= \frac{a_{i+1}}{2n} x^2 + \frac{b_{i+1}}{n} x - \frac{1}{2nk^2}\sum_1^i{}_h (2h-1)(a_{i+1} - a_h) - \frac{1}{nk}\sum_1^i{}_h (b_{i+1} - b_h)$$

essendo $n = \frac{1}{2k^2}\sum_1^k{}_i (2i-1)\,a_i + \frac{1}{k}\sum_1^k{}_i b_i$.

Analogamente l'ordinata corrispondente risulta

$$q(x) = \frac{1}{m}\int_0^x xy\,dx = \frac{1}{m}\sum_1^i{}_h \int_{\frac{h-1}{k}}^{\frac{h}{k}} (a_h x^2 + b_h x)\,dx + \frac{1}{m}\int_{\frac{i}{k}}^{x} (a_{i+1} x^2 + b_{i+1} x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{mk^3}\sum_1^i{}_h \frac{h^3 - (h-1)^3}{3} a_h + \frac{1}{mk^2}\sum_1^i{}_h \frac{h^2 - (h-1)^2}{2} b_h + \frac{1}{m}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{i^3}{3k^3}\right) a_{i+1} +$$

$$+ \frac{1}{m}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{i^2}{2k^2}\right) b_{i+1} = \frac{a_{i+1}}{3m} x^3 - \frac{b_{i+1}}{2m} x^2 - \frac{1}{3mk^3}\sum_1^i{}_h (3h^2 - 3h + 1)(a_{i+1} - a_h) -$$

$$- \frac{1}{2mk^2}\sum_1^i{}_h (2h-1)(b_{i+1} - b_h)$$

essendo $m = \frac{1}{3k^3}\sum_1^k{}_i (3i^2 - 3i + 1)\,a_i + \frac{1}{2k^2}\sum_1^k{}_i (2i-1)\,b_i$.

Eseguendo la trasformazione definita dalle equazioni

$$\begin{cases} p(x)^{(i)'} = p(x) + \dfrac{1}{2nk^2}\sum_1^i{}_h (2h-1)(a_{i+1}-a_h) + \\ \qquad + \dfrac{1}{nk}\sum_1^i{}_h (b_{i+1}-b_h) + \dfrac{1}{2n}\dfrac{b_{i+1}^2}{a_{i+1}} \\ q(x)^{(i)'} = q(x) + \dfrac{1}{3mk^3}\sum_1^i{}_h (3h^2-3h+1)(a_{i+1}a_h) + \\ \qquad + \dfrac{1}{2mk^2}\sum_1^i{}_h (2h-1)(b_{i+1}-b_h) \end{cases} \tag{26}$$

per $a_{i+1} \neq 0$, il tratto della curva di concentrazione corrispondente alla classe $i+1^{esima}$ della distribuzione risulta definito parametricamente dalle equazioni

$$\begin{cases} p(x)^{(i)'} = \dfrac{a_{i+1}}{2n}\left(x^2 + 2\dfrac{b_{i+1}}{a_{i+1}}x + \dfrac{b_{i+1}^2}{a_{i+1}^2}\right) \\ q(x)^{(i)''} = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{a_{i+1}}{3}x^3 + \dfrac{b_{i+1}}{2}x^2\right) \end{cases}$$

alle quali va aggiunta la condizione $\dfrac{i}{k} \leq x \leq \dfrac{i+1}{k}$.

Se si pone $t = x + \dfrac{b_{i+1}}{a_{i+1}}$

risulta $p^{(i)'} = \dfrac{a_{i+1}}{2n}t^2$ e quindi $t = \pm\left(\dfrac{2n}{a_{i+1}}p^{(i)'}\right)^{\frac{1}{2}}$:

in questa formula si adotterà il segno + o — a seconda che è $-\dfrac{b_{i+1}}{a_{i+1}} \lessgtr \dfrac{i}{k}$, cioè a seconda che la retta $y = a_{i+1}x + b_{i+1}$ interseca l'asse x a sinistra o a destra del punto $\dfrac{i}{k}$, e poichè $a_{i+1}\dfrac{i}{k} + b_{i+1} > 0$, a seconda che la y è crescente o decrescente, quindi a seconda del segno di a_{i+1}.

Sostituendo nell'espressione di $q^{(i)'}$ a x il valore $t - \dfrac{b_{i+1}}{a_{i+1}}$,

risulta

$$q^{(i)'} = \frac{1}{m}\left[\frac{a_{i+1}}{3}\left(t-\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}\right)^3 + \frac{b_{i+1}}{2}\left(t-\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{6m}\left(2\,a_{i+1}t^3 - 3\,b_{i+1}t^2 + \frac{b_{i+1}^2}{a_{i+1}^2}\right).$$

Introducendo in questa la espressione di t in funzione di $p^{(i)'}$ si ha l'equazione esplicita del tratto $i+1^{esimo}$ della curva di concentrazione:

$$q^{(i)} = \frac{n}{m}\,p^{(i)}\left[\pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2n}{a_{i+1}}\,p^{(i)}} - \frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}\right] \tag{27}$$

riferito agli assi

$$\begin{cases} p^{(i)} = p^{(i)'} \\ q^{(i)} = q^{(i)'}\,\dfrac{1}{6\,m}\,\dfrac{b_{i+1}^3}{a_{i+1}^2} \end{cases} \tag{28}$$

il campo di variabilità di $p^{(i)}$ essendo definito dalla limitazione

$$\frac{1}{2n}\left(\frac{b_{i+1}}{\sqrt{a_{i+1}}} + \frac{i}{k}\sqrt{a_{i+1}}\right) \leq p^{(i)} \leq \frac{1}{2n}\left(\frac{b_{i+1}}{\sqrt{a_{i+1}}} + \frac{i+1}{k}\sqrt{a_{i+1}}\right).$$

Nella (26) il radicale va preso col segno + o — a seconda del segno di a_{i+1}. La quantità sotto il segno di $\sqrt{\ }$ è sempre > 0 perchè $p^{(i)}$ è del segno di a_{i+1}.

Se $a_{i+1} = 0$ le coordinate degli assi cui va riferita la (27) risultano sempre, per $p=0$, $q=0$, dal sistema (28), ove in questo si ponga $a_{i+1} = 0$ e si sopprimano i termini $\frac{1}{2n}\frac{b_{i+1}^2}{a_{i+1}}$ e $\frac{1}{6m}\frac{b_{i+1}^3}{a_{i+1}^2}$ che in tal caso diventano infiniti; l'equazione del tratto $i+1^{esimo}$ della curva di concentrazione coincide con la (19), valida nel caso di un istogramma, nella quale va sostituito b_{i+1} ad a_{i+1}.

Giova ora, per studiare l'andamento delle curve cui appartengono due tratti successivi della curva di concentrazione nell'intorno dell'estremo comune di essi, ricercare il significato geometrico delle trasformazioni definite dalle (28) per mezzo delle (26).

Se si osserva che

$$n\,(p^{(i)} - p) = -\sum_{1}^{i}{}_{h} \int_{\frac{h+1}{k}}^{\frac{h}{k}} (a_h x + b_h)\, d\,a + \int_{0}^{\frac{i}{k}} (a_{i+1} x + b_{i+1})\, d\,x -$$

$$- \int_{0}^{-\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}} (a_{i+1} x + b_{i+1})\, d\,x\,,$$

indicando con $\Delta\, p^{(i)}$ la differenza $p^{(i+1)} - p^{(i)}$ risulta che:

$$n\,\Delta\, p^{(i)} = \int_{0}^{\frac{i+1}{k}} [(a_{i+2} - a_{i+1})\, x + (b_{i+2} - b_{i+1})]\, d\,x - \int_{0}^{-\frac{b_{i+2}}{a_{i+2}}} (a_{i+2} x + b_{i+2})\, d\,x +$$

$$+ \int_{0}^{-\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}} (a_{i+1} x + b_{i+1})\, d\,x = \int_{\frac{i+1}{k}}^{-\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}} (a_{i+1} x + b_{i+1})\, d\,x - \int_{\frac{i+1}{k}}^{-\frac{b_{i+2}}{a_{i+2}}} (a_{i+2} x + b_{i+2})\, d\,x$$

e quindi:

$$\Delta\, p^{(i)} = \frac{1}{2\,n} \left\{ (a_{i+2} - a_{i+1})\, \frac{(i+1)^2}{k^2} + 2\,(b_{i+2} - b_{i+1})\, \frac{i+1}{k} + \frac{b_{i+2}^{\,2}}{a_{i+2}} - \frac{b_{i+1}^{\,2}}{a_{i+1}} \right\}. \quad (29)$$

Se la f nel punto $\dfrac{i+1}{k}$ non presenta discontinuità, cioè se

$$a_{i+1}\, \frac{i+1}{k} + b_{i+1} = a_{i+2}\, \frac{i+1}{k} + b_{i+2}\,,$$

si ha

$$\Delta\, p^{(i)} = \frac{1}{2\,n} \left(\frac{b_{i+2}}{a_{i+2}} - \frac{b_{i+1}}{a_{i+1}} \right) \left(a_{i+2}\, \frac{i+1}{k} + b_{i+2} \right) \quad \text{per} \quad \begin{matrix} a_{i+1} \neq 0 \\ a_{i+2} \neq 0\,; \end{matrix}$$

invece per $a_{i+1} = 0$ bisogna considerare solo il primo dei tre integrali della (29), e quindi $\Delta\, p^{(i)} = (b_{i+2} - b_{i+1})\, \dfrac{i+1}{2\,n\,k}$,

cioè: se la spezzata è continua nel punto $\dfrac{i+1}{k}$ l'ascissa dell'origine

delle coordinate del sistema di riferimento $i+1^{esimo}$ rispetto al sistema i^{esimo} $(=-\Delta p^{(i)})$, è uguale, se $a_{i+1} \neq 0$, all'area del triangolo T determinato dalle rette $i+1^{esima}$ e $i+2^{esima}$ della spezzata e l'asse delle x, preso col segno $+$ o $-$ a seconda che l'intersezione della prima preceda o segua quella della seconda sull'asse x; all'area del triangolo determinato dalle stesse rette sull'asse delle y presa col segno $+$ 0 $-$ a seconda che percorrendo la retta nel verso positivo la intersezione della seconda preceda o segua quella della prima, se una almeno delle $a = 0$.

Se la f nel punto $\frac{i+1}{k}$ presenta una discontinuità i due triangoli di cui all'enunciato precedente diventano due quadrangoli. Assunto come verso positivo sull'asse delle x quello da $-\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}\,a\,-\frac{b_{i+2}}{a_{i+2}}$ (o sull'asse delle y quella da b_{i+1} a b_{i+2}), restano determinate in valore assoluto e segno, le aree dei quadrangoli, in base alla convenzione di attribuire segno $+$ o $-$ ad un'area a seconda che essa resti a sinistra o a destra di chi ne percorra il contorno nel verso positivo. Nel caso in cui una almeno delle a sia nulla e il quadrangolo non sia intrecciato l'area risulta certo del segno di $b_{i+1}\ b_{i+2}$. Nel caso in cui nessuna delle a sia nulla, e il quadrangolo non sia intrecciato, l'area risulta del segno di $-\frac{b_{i+2}}{a_{i+2}}+\frac{b_{i+1}}{a_{i+2}}$.

Se i quadrangoli sono intrecciati il segno di T dipende da quello della somma delle aree dei due triangoli dei quali esso consta e dipende da tutti i quattro parametri delle due rette secondo risulta dalla (29).

Poichè si verifica subito che $\Delta q^{(i)}$ è il momento di T rispetto alla origine, concludiamo:

definita la curva di concentrazione mediante le k equazioni (27), le coordinate dell'origine del sistema di riferimento del tratto $i+2^{esimo}$ della curva rispetto al sistema $i+1^{esimo}$ sono espresse, in valore e segno, dall'area del poligono T formato dalle rette $i+1^{esima}$ e $1+2^{esima}$ della spezzata, gli assi x oppure y, ed eventualmente dalla retta $x=\frac{i+1}{k}$ e dal suo momento primo rispetto all'origine, quando si assuma come verso positivo sul contorno quello che fa succedere, sugli assi alla intersezione della retta $i+1^{esima}$ la intersezione della

retta $i + 2^{esima}$ (8). Ascissa e ordinata sono pertanto concordi. Se T è convesso $\left(\text{ciò che accade sempre se } f \text{ è continua nel punto } \frac{i+1}{k}\right)$, esse sono $\gtrless 0$ a seconda che è $\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}} - \frac{b_{i+2}}{a_{i+2}} \gtrless 0$ se $a \neq 0$, oppure $b_{i+1} - b_{i+2} \gtrless 0$ se una almeno delle a uguale a 0.

In caso contrario il segno di T è fornito dalla (29), nella quale si sostituisce 0 come estremo superiore d'integrazione, se una almeno delle $a = 0$, ma questo caso però non presenta alcun interesse.

Consideriamo ora le prime tre derivate della (27)

$$\frac{d\,q^{(i)}}{d\,p^{(i)}} = \frac{n}{m}\left[\pm\sqrt{\frac{2n}{a_{i+1}}\,p^{(i)} - \frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}}\right] = \frac{n}{m}\,x$$

$$\frac{d^2\,q^{(i)1}}{d\,p^{(i)2}} = \pm\frac{n}{2\,m}\sqrt{\frac{2\,n}{a_{i+1}\,p^{(i)}}} = \frac{n^2}{m}\,\frac{1}{a_{i+1}\,x + b_{i+1}}$$

$$\frac{d^3\,q^{(i)}}{d\,p^{(i)3}} = \mp\frac{n}{4\,m}\,\frac{1}{p^{(i)}}\sqrt{\frac{2\,n}{a_{i+1}\,p^{(i)}}} = \mp\frac{n}{4\,m\,p^{(i)}}\,\frac{1}{a_{i+1}\,x + b_{i+1}}$$

Se la f è continua nel punto $\frac{i+1}{k}$ le cubiche $i + 1^{esima}$ e $1 + 2^{esima}$ presentano in questo uguali le derivate prima e seconda: la differenza fra le derivate terze è espressa dalla

$$\left[\frac{d^3\,(q^{(i)} - q^{(i+1)})}{d\,p^{(i)3}}\right]_{x=\frac{i+1}{k}} = \frac{n}{4\,m}\,\frac{1}{a_{i+1}\,\frac{i+1}{k} + b_{i+1}}\left(\frac{1}{p^{(i+1)}} - \frac{1}{p^{(i)}}\right)$$

e pertanto risulta $\gtrless$ a seconda che è $\Delta\,p^{(i)} \lessgtr 0$.

Se la f nel punto $\frac{i+1}{k}$ presenta invece una discontinuità risul-

---

(8) La definizione del segno di T cade evidentemente in difetto quando, la distribuzione essendo discontinua, le due rette s'intersecano sull'asse x, ma anche in tal caso il segno si stabilisce facilmente con considerazioni di continuità.

tano uguali solo le derivate prime e la differenza tra le derivate seconde è espressa dalla

$$\left[\frac{d^2\left(q^{(i)} - q^{(i+1)}\right)}{d\,p^{(i)2}}\right]_{x=\frac{i+1}{k}} = \frac{n^2}{m}\left(\frac{1}{a_{i+1}\dfrac{i+1}{k} + b_{i+1}} - \frac{1}{a_{i+2}\dfrac{i+1}{k} + b_{i+2}}\right)$$

ed essa è $\gtrless 0$ a seconda che, essendo $\varepsilon > 0$, risulti

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[f\left(\tfrac{i+1}{k} + \varepsilon\right) - f\left(\tfrac{i+1}{k} - \varepsilon\right) \right] \gtrless 0 . \qquad \text{Quindi :}$$

Nel caso in cui la legge di distribuzione è lineare, ma varia da una classe all'altra delle intensità del carattere, la curva di concentrazione si compone in generale di archi successivi di cubiche. Gli estremi di questi archi corrispondono al valore del carattere estremo di due classi. In tali punti due cubiche successive presentano un contatto del secondo o del primo ordine a seconda che i corrispondenti lati della spezzata abbiano oppur no un estremo in comune. Nel primo caso due cubiche

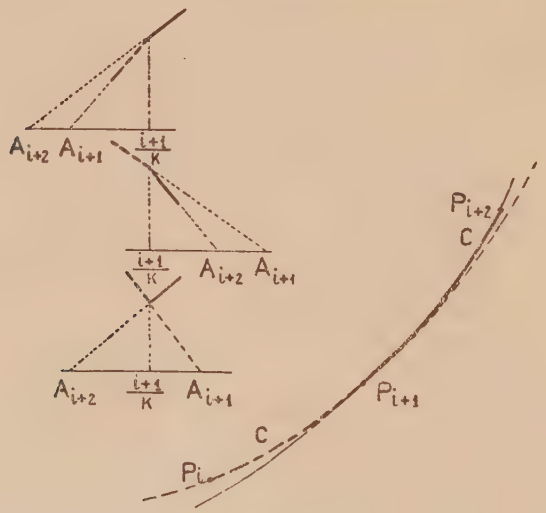


Fig. 6.

successive si attraversano nel punto di contatto e nell'intorno di questo la curva di concentrazione consta di due rami che sono situati dalla stessa banda della retta di equidistribuzione rispetto agli altri due, o da banda opposta, a seconda che $\Delta p^{(i)} \gtrless 0$. (Fig. 6 e fig. 7). Il se-

condo caso ha minore interesse pratico. Le due cubiche non si attraversano nel punto e i due rami che compongono la curva di concentrazione giacciono, nell'intorno di esso, il primo dalla stessa banda della retta di equidistribuzione e il secondo da banda opposta rispetto

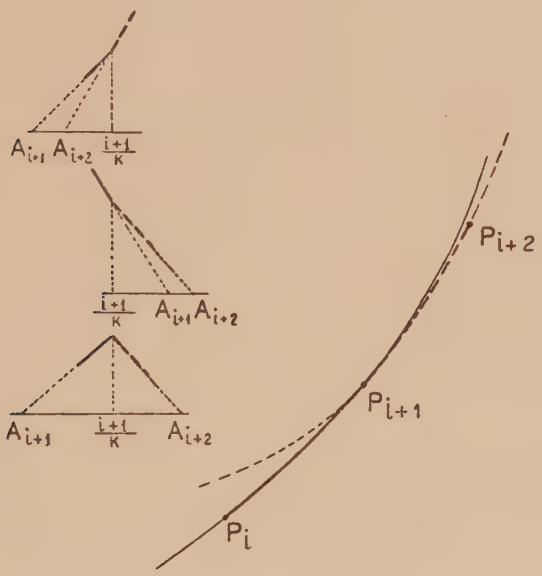


FIG. 7.

agli altri due rami, o viceversa, a seconda che la f cresce o decresce nel punto. L'andamento delle due cubiche nell'intorno del punto di contatto non è quindi diverso, come si intuisce, da quello delle due parabole nel caso di un istogramma. (V. Figg. 3 e 4).

Procediamo ora al calcolo del rapporto di concentrazione.

Colle stesse notazioni del n. 9 si ha:

$$\int_{p_i^{(i)'}}^{p_{i+1}^{(i)'}} q^{(i)'}\, d\, p^{(i)'} = \frac{1}{6\,m\,n} \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} (2\,a_{i+1}\,x^3 + 3\,b_{i+1}\,x^2)\,(a_{i+1}\,x + b_{i+1})\,dx =$$

$$= \frac{1}{6\,m\,n} \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{i+1}{k}} (2\,a_{i+1}^2\,x^4 + 5\,a_{i+1}\,b_{i+1}\,x^3 + 3\,b_{i+1}\,x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{6\,m\,n}\left\{\frac{2\,a_{i+1}^2}{5\,k^5}[(i+1)^5 - i^5] + \frac{5\,a_{i+1}\,b_{i+1}}{4\,k^4}[(i+1)^4 - i^4] + \right.$$

$$\left. + \frac{3\,b_{i+1}^2}{3\,k^3}[(i+1)^3 - i^3]\right\} = \frac{1}{6\,m\,n\,k^5}\left\{\frac{2}{5}(5\,i^4 + 10\,i^3 + 10\,i^2 + 5\,i + 1)\,a_{i+1}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{4}\,k\,(4\,i^3 + 6\,i^2 + 4\,i + 1)\,a_{i+1}\,b_{i+1} + k^2\,(3\,i^2 + 3\,i + 1)\,b_{i+1}^2\right\};$$

$$q_i - q_i^{(i)'} = -\frac{1}{6\,m\,k^3}\left\{2\sum_1^i{}_h\,(3\,h^2 - 3\,h + 1)\,(a_{i+1} - a_h) + \right.$$

$$\left. + 3\,k\sum_1^i{}_h\,(2\,h - 1)\,(b_{i+1} - b_h)\right\} = \frac{1}{6\,m\,k^3}\left\{2\sum_1^i{}_h\,(3\,h^2 - 3\,h + 1)\,a_h + \right.$$

$$\left. + 3\,k\sum_1^i{}_h\,(2\,h - 1)\,b_h - 2\,i^3\,a_{i+1} - 3\,k\,i^2\,b_{i+1}\right\};$$

$$p_{i+1} - p_i = \frac{1}{n\,k^2}\left\{\frac{2\,i+1}{2}\,a_{i+1} + k\,b_{i+1}\right\} \qquad \text{e quindi:}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(q_i - q_i^{(i)'})\,(p_{i+1} - p_i) = \dfrac{1}{6\,m\,n\,k^5}\left\{\left[\dfrac{2\,i+1}{2}\,a_{i+1} + k\,b_{i+1}\right]\right. \\ \qquad \left.\left[2\sum_1^i{}_h\,(3\,h^2 - 3\,h + 1)\,a_h + 3\,k\sum_1^i{}_h\,(2\,h-1)\,b_h\right] - \right.\end{array}\right.$$

$$\left. - (2\,i^4 + i^3)\,a_{i+1}^2 - \left[\frac{3}{2}(2\,i^3 + i^2) + 2\,i^3\right]k\,a_{i+1}\,b_{i+1} - 3\,k^2\,i^2\,b_{i+1}^2\right\},$$

da cui:

$$\int_{p_i}^{p_{i+1}} q\,d\,p = \frac{1}{6\,m\,n\,k^5}\left\{\left(3\,i^3 + 4\,i^2 + 2\,i + \frac{2}{5}\right)a_{i+1}^2 + \right.$$

$$+ \left(6\,i^2 + 5\,i + \frac{5}{4}\right)k\,a_{i+1}\,b_{i+1} + (3\,i+1)\,k^2\,b_{i+1}^2 + \cdot$$

$$\left. + \left(\frac{2\,i+1}{2}\,a_{i+1} + k\,b_{i+1}\right)\left[2\sum_1^i{}_h\,(3\,h^2 - 3\,h + 1)\,a_h + 3\,k\sum_1^i{}_h\,(h-1)\,b_h\right]\right\},$$

e quindi:

$$2\,S = 1 - \frac{1}{3\,m\,n\,k^5}\sum_0^{k-1}{}_i\left\{\left(3\,i^3 + 4\,i^2 + 2\,i + \frac{2}{5}\right)a_{i+1}^2 + \right.$$

$$+\left(6\,i^2+5\,i+\frac{5}{4}\right)k\,a_{i+1}\,b_{i+1}+(3\,i+1)\,k^2\,b_{i+1}^2+$$

$$+\left(\frac{2\,i+1}{2}\,a_{i+1}+k\,b_{i+1}\right)\left[2\sum_{1}^{i}(3\,h^2-3\,h+1)\,a_h+3\,k\sum_{1}^{i}(2h-1)\,b_h\right]\Bigg\}.$$

Sostituendo a m e ad n le loro espressioni si ha l'invariante della distribuzione

$$\left\{\begin{array}{l} I=1-\dfrac{4\sum_{0}^{k-1}\left\{\left(3\,i^3+4\,i^2+2\,i+\frac{2}{5}\right)a_{i+1}^2+\left(6\,i^2+5\,i+\frac{5}{4}\right)k\,a_{i+1}\,b_{i+1}+\right.}{\left[2\sum_{1}^{k}(3\,i^2-3\,i+1)\,a_i+3\,k\sum_{1}^{k}(2\,i-1)\,b_i\right]} \\ \left.+(3i+1)k^2b_{i+1}^2-\left(\frac{2i+1}{2}a_{i+1}+kb_{i+1}\right)\left[2\sum_{1}^{i}(3h^2-3h+1)a_h+3k\sum_{1}^{i}(2h-1)b_h\right]\right\} \\ \qquad\qquad \left[\sum_{1}^{k}(2\,i-1)\,a_i+2\,k\sum_{1}^{k}b_i\right] \end{array}\right. \tag{31}$$

dal quale si deducono i valori del rapporto di concentrazione nei vari casi moltiplicando per il coefficiente $\dfrac{m\,(c_2-c_1)}{m\,(c_2-c_1)+n\,c_1}$.

12) Interessante dal punto di vista teorico è la distribuzione di tipo circolare o ellittico, che dir si voglia, poichè si passa dall'uno all'altro solo con un cambiamento dell'unità di misura delle ordinate.

Posto il centro del semicerchio a distanza unitaria dall'origine sull'asse delle x e assunta l'unità come raggio, l'equazione della f è

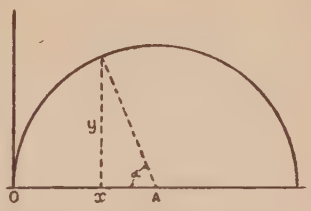


FIG. 8.

$$\left\{\begin{array}{l} y=\sqrt{2\,x-x^2} \\ 0\leq x\leq 2 \end{array}\right.$$

In un sistema di coordinate polari di centro A, semiretta origine AO e verso positivo per la misura degli angoli quello delle lancette dell'orologio, poichè risulta

$$x=1-\cos\varphi\ ,\ y=\sin\varphi\ ,\ d\,x=\sin\varphi\,d\,\varphi$$

le equazioni parametriche della curva di concentrazione sono:

$$\begin{cases} p(\alpha) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\alpha} \sin^2\varphi \, d\varphi \\ q(\alpha) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^{\alpha} (1 - \cos\varphi)\sin^2\varphi \, d\varphi \end{cases} \tag{32}$$

dove $n = \dfrac{\pi}{2}$ che è l'area del semicerchio, $m = n$ perchè la distribuzione è simmetrica e la media di essa corrisponde al valore 1 del carattere.

Integrando le (32):

$$\begin{cases} p(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) \\ q(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \dfrac{2}{3}\sin^3\alpha) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} p(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi}(2\alpha - \sin 2\alpha) \\ q(\alpha) = p(\alpha) - \dfrac{2}{3\pi}\sin^3\alpha . \end{cases} \tag{33}$$

Se si stendono i valori del parametro α sull'asse $p = 0$ e sull'asse $q = 0$ i valori di p, la prima delle (33) risulta l'equazione di una sinusoide rispetto al sistema di riferimento formato dalla retta di equidistribuzione (asse delle α) e dall'asse delle p, su quest'ultima cambiato il verso e assunta come unità il segmento $\dfrac{1}{2\pi}$.

Questa curva $P(\alpha)$ è disegnata con tratto continuo molto sottile nella figura. La curva punteggiata rappresenta, rispetto al sistema di riferimento costituito dalla stessa retta di equidistribuzione e dall'asse delle q, cambiato su quest'ultimo il verso e assunto come unità di misura il segmento $\dfrac{2}{3\pi}$, la differenza $\xi = p(\alpha) - q(\alpha)$.

Se ora consideriamo che si corrispondono i valori di p e di p-q relativi ai punti delle due curve corrispondenti allo stesso valore del parametro, risulta subito la costruzione per punti della curva di

concentrazione, (disegnata con tratto continuo e grosso), che è stata eseguita nella figura.

Preso un punto P della P (α) e le parallele per esso all'asse delle p e delle q, se associamo alla intersezione Q_1 della prima colla retta

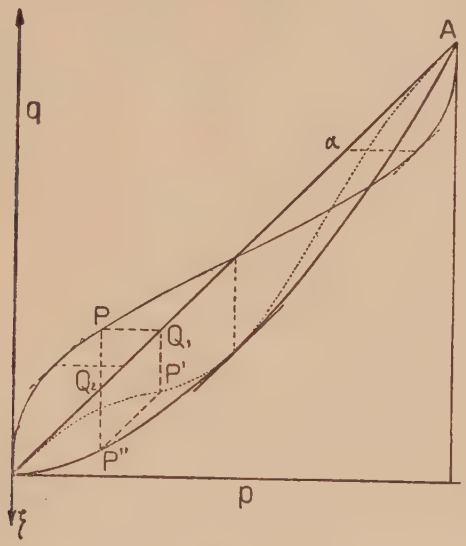


Fig. 9.

di equidistribuzione quella, Q_2, della seconda, al variare di P le due rette definiscono su quest'ultima una corrispondenza (1,1) che non è proiettiva. *Se si associa alla operazione* G *che fa passare dal punto* Q_1 *al punto* Q_2, *la identità sull'asse delle* q, *risulta definita sul piano* $(\alpha\, q)$ *una corrispondenza* (1,1) *nella quale la curva di concentrazione è trasformata della curva* $\xi = \sin^3 \alpha$, *essendo* $\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{3\pi}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ *il rapporto delle unità di misura scelte sull'asse delle* α *quello delle* ξ.

Poichè la G fa corrispondere sulla $\xi = 0$ a punti simmetrici rispetto al punto medio del segmento $O\,A$ punti simmetrici, e inoltre la $\xi = \sin^3 \alpha$ è simmetrica rispetto alla parallela all'asse delle q per tale punto, la curva di concentrazione risulta anch'essa simmetrica rispetto a quella retta (simmetria obliqua). Tale retta interseca la curva nel punto in cui la tangente è parallela alla retta di equidistribuzione e divide per metà l'area di concentrazione.

Rimando al n. seguente la verifica analitica di questa proprietà, poichè essa è comune e tutte le curve di concentrazione relative a distribuzioni simmetriche.

Procediamo ora alla determinazione della equazione della C, eliminando il parametro α nelle (33). Sostituendo alla prima delle due equazioni la loro somma, alla seconda la loro differenza, si ha:

$$\begin{cases} p+q = \frac{2}{\pi}\left(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{3}\right) \\ p-q = \frac{2}{3\pi}\sin^3\alpha \end{cases}$$

Posto: $p+q = \xi\sqrt{2}$

$p-q = \eta\sqrt{2}$

si ricava $\sin\alpha = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{\sqrt{2}}\eta}$ e quindi

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\arcsin\sqrt[3]{\frac{3\pi}{\sqrt{2}}\eta} \mp \sqrt[3]{\frac{3\pi}{\sqrt{2}}\eta}\left\{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}}\eta\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{13\pi}{3\sqrt{2}}\eta\right] \quad (34)$$

In questa la curva risulta riferita alla retta di equidistribuzione e alla normale ad essa nella origine. η varia da 0 a $\frac{\sqrt{2}}{3\pi}$, che rappresenta la massima altezza della curva di concentrazione sulla retta di equidistribuzione. L'ordinata corrispondente a tale punto è $\xi = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3\pi}$.

Descrivendo la curva dall'origine al punto (1,1) α varia prima da 0 a $\frac{\sqrt{2}}{3\pi}$, poi da $\frac{\sqrt{2}}{3\pi}$ a 0; ξ cresce da 0 a $\sqrt{2}$, il valore corrispondente ad α essendo fornito dalla (34), nella quale si assume per il secondo termine, il segno — per il primo tratto e il segno + per il secondo.

Il doppio del valore dell'area di concentrazione è espresso dalla formula

$$2S = \int_0^1 p\,dq - q\,dp =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \Big[(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)(-2\sin^2\alpha\cos\alpha) +$$

$$+ \frac{2}{3}\sin^3\alpha(1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\Big] d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \left(\frac{4}{3}\sin^5\alpha + 2\sin^3\cos^2\alpha - 2\alpha\sin^2\alpha\cos\alpha\right) d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \left(-\frac{2}{3}\sin^5\alpha + \frac{8}{3}\sin^3\alpha\right) d\alpha$$

poichè $\displaystyle\int_0^{\pi} \alpha\sin^2\alpha\cos\alpha\, d\alpha = \left[\frac{\alpha}{3}\sin^3\alpha\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{3}\sin^3\alpha\, d\alpha\,.$

Ora

$$\int_0^{\pi} \sin^3\alpha\, d\alpha = -\int_0^{\pi} (1 - \cos^2\alpha)\, d\cos\alpha = \left[\cos\alpha\right]_{\pi}^{0} - \frac{1}{3}\left[\cos^3\alpha\right]_{\pi}^{0} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$\int_0^{\pi} \sin^5\alpha\, d\alpha = \int_0^{\pi} (2\cos^2\alpha - 1 - \cos^4\alpha)\, d\cos\alpha =$$

$$= \left[\cos\alpha\right]_{\pi}^{0} - \frac{2}{3}\left[\cos^3\alpha\right]_{\pi}^{0} + \frac{1}{5}\left[\cos^5\alpha\right]_{\pi}^{0} = 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15},$$

quindi: $\displaystyle 2S = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{32}{9} - \frac{32}{45}\right) = \frac{128}{45\pi^2} = 0{,}2882\ldots$

È questo l'invariante della distribuzione. Se il semicerchio si suppone in posizione generica sull'asse delle x, con centro nel punto $\dfrac{c_1 + c_2}{2}$ e raggio $\dfrac{c_2 - c_1}{2}$ risulta: $\displaystyle R = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}\,\frac{128}{45\pi^2}$.

13) La costruzione della curva di concentrazione fornita al numero precedente è affatto generale, ma le due curve parametriche, pur conservando sempre la caratteristica di essere monotone, possono assumere le forme più svariate. La $P(\alpha)$ può attraversare la retta di equidistribuzione un numero qualunque di volte. Nel caso di una distribuzione lineare, per es., o non la interseca affatto o coincide con essa (frequenza costante). Essa la traverserà nel punto

medio M se il valore mediano del carattere cade nel punto di mezzo del segmento $c_1\, c_2$. Se con la mediana coincide la media aritmetica il coefficiente angolare della tangente alla curva di concentrazione nel punto $p = 1/2$ è uguale ad 1. Se per di più la curva di distribuzione è simmetrica, la $P(\alpha)$ presenta simmetria rispetto al punto M, poichè risulta $\int_{c_1}^{c_1+h} f(x)\, dx = -\int_{c_2}^{c_2-h} f(x)\, dx$.

La curva $\xi = p - q$ è simmetrica rispetto alla parallela all'asse $p = 0$ per M. Infatti in tal caso la quantità complessiva di carattere spettante alle classi della distribuzione, simmetriche rispetto all'asse di questa, è uguale al numero degli elementi di queste, moltiplicato per l'intensità media $\frac{c_1 + c_2}{2}$ del carattere, relativa a tutta la distribuzione. Pertanto si ha per ogni valore di $0 \leq x \leq \frac{c_1 + c_2}{2}$:

$$n\frac{c_2 - c_1}{2}\left[\left(q\frac{c_2 + c_1}{2} + x\right) - q\left(\frac{c_2 + c_1}{2} - x\right)\right] =$$

$$= n\frac{c_2 - c_1}{2}\left[p\left(\frac{c_2 + c_1}{2} + x\right) - p\left(\frac{c_2 + c_1}{2} - x\right)\right]$$

e quindi

$$p\left(\frac{c_2 + c_1}{2} + x\right) - q\left(\frac{c_2 + c_1}{2} + x\right) = p\left(\frac{c_2 + c_1}{2} - x\right) - q\left(\frac{c_2 + c_1}{2} - x\right),$$

come si era affermato.

Viceversa, se per qualunque x è soddisfatta questa relazione, si deduce subito che ogni tratto della curva di distribuzione avente lo stesso punto medio della distribuzione totale è simmetrico rispetto all'asse di questa e quindi che la curva di concentrazione è simmetrica. Concludendo:

condizione necessaria e sufficiente perchè una curva di concentrazione sia simmetrica (*simmetria obliqua*) *è che la curva di distribuzione delle frequenze sia simmetrica.*

14) Consideriamo ora una distribuzione di tipo iperbolico (9) $f = \frac{1}{x^h}$ nell'intervallo $c_1\, c_2$.

---

(9) Per questo esempio, e segg. v. anche E. J. GUMBEL: *Ein Mass der Konzentration bei pekuniären Verteilungen* e *Das Konzentrations Mass* già cit.

Per $h > 1$, $\neq 2$ si ha:

$$p(x) = \frac{1}{n}\int_{c_1}^{x} \frac{dz}{z^h} = \frac{1}{n(h-1)}\left(\frac{1}{c_1^{h-1}} - \frac{1}{x^{h-1}}\right)$$

essendo $$n = \frac{1}{h-1}\left(\frac{1}{c_1^{h-1}} - \frac{1}{c_2^{h-1}}\right).$$

$$q(x) = \frac{1}{m}\int_{c_1}^{x} \frac{dz}{z^{h-1}} = \frac{1}{m(h-2)}\left(\frac{1}{c^{h-2}} - \frac{1}{x^{h-2}}\right)$$

essendo $$m = \frac{1}{h-2}\left(\frac{1}{c_1^{h-2}} - \frac{1}{c_2^{h-2}}\right).$$

Dalla prima si ricava $x^{1-h} = c_1^{1-h} - n(h-1)\,p(x) =$

$$= c_1^{1-h} - \left(\frac{1}{c_1^{h-1}} - \frac{1}{c_2^{h-1}}\right) p_x ,$$

dalla seconda $x^{2-h} = c_1^{2-h} - (c_1^{2-h} - c_2^{2-h})\,q_x$, e quindi

$$q = \frac{1}{c_1^{2-h} - c_2^{2-h}}\left\{c_1^{2-h} - \left[c_1^{1-h} - (c_1^{1-h} - c_2^{1-h})\,p\right]^{\frac{2-h}{1-h}}\right\}.$$

L'equazione di questa curva, se si assumono come assi coordinati le rette:

$$\begin{cases} \xi = c_1^{1-h} - (c_1^{1-h} - c_2^{1-h})\,p \\ \eta = c_1^{2-h} - (c_1^{2-h} - c_2^{2-h})\,q \end{cases} \qquad (35)$$

diventa $$\eta = \xi^{\frac{2-h}{1-h}} \qquad (36) \qquad \text{per} \quad c_2^{1-h} \leq \xi \leq c_1^{1-h}.$$

Per $h = 1$ le equazioni parametriche della curva di concentrazione diventano

$$p(x) = \frac{1}{n}\int_{c_1}^{x} \frac{dz}{z} = \frac{1}{n}\log\frac{x}{c_1} \qquad \text{essendo} \qquad n = \log\frac{c_2}{c_1}$$

$$q(x) = \frac{1}{m}\int_{c_1}^{x} \frac{dz}{z} = \frac{1}{m}(x - c_1) \qquad \text{essendo} \qquad m = c_2 - c_1 , \text{ quindi}$$

$$x = c_1\, e^{n\,p} = c_1\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{p} \qquad \text{e} \qquad q = \frac{c_1}{c_2 - c_1}\left[\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{p} - 1\right]$$

Posto $\dfrac{c_2}{c_1} = s$ questa equazione si scrive $q = \dfrac{s^p - 1}{s - 1}$ (37)

Con una translazione dell'asse q parallelamente a sé stesso e con un cambiamento delle unità di misura, definiti dalla trasformazione:

$$\begin{cases} \xi = p \log s \\ \eta = (s - 1)\, q + 1 \end{cases}$$

la (37) assume la forma $\xi = \log \eta$

per $1 \leq \eta \leq s$.

Per $h = 2$ si ha:

$$p(x) = \frac{1}{n} \int_{c_1}^{x} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{n} (c_1^{-1} - x^{-1}) \qquad \text{essendo} \qquad n = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}$$

$$q(x) = \frac{1}{m} \int_{c_1}^{x} \frac{dz}{z} = \frac{1}{m} \log \frac{x}{c_1} \qquad \text{essendo} \qquad m = \log \frac{c^2}{c_1},$$

quindi $x = c_1 \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^q$

e

$$p = \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} \left[c_1^{-1} - c_1^{-1} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^q \right] = \frac{s}{s - 1} [1 - s^{-q}] \qquad (38)$$

$$\text{ove } s = \frac{c_2}{c_1}.$$

Se si opera la trasformazione

$$\begin{cases} \xi = 1 - \dfrac{s - 1}{s}\, p \\ \eta = -q \log s \end{cases}$$

la (38) assume la forma $\eta = \log \xi$ per $\frac{1}{s} \leq \xi \leq 1$.

Risulta da quanto abbiamo dimostrato al n. 4 che le curve di concentrazione relative a due distribuzioni uguali, ma di polo diverso, coincidono quando si assumono come sistemi di riferimento la retta $p = 0$ e le simmetriche rispetto alla $q = 0$ delle tangenti alle due curve di concentrazione che risultano da una rappresentazione nella quale siano stati riportati, con la stessa unità di misura, sull'asse delle q, non le percentuali dell'ammontare del carattere posseduto dai gruppi ordinati degli elementi delle due distribuzioni, ma l'ammontare stesso. Esse sono pertanto proiettive. Quindi:

le curve di concentrazione relative a distribuzioni di tipo iperbolico sono o iperboli, o parabole, o curve logaritmiche (10).

Procediamo ora al calcolo del rapporto di concentrazione. Per h generico si ha

$$\int_0^1 p\,dq - q\,dp = \int_{c_1^{2-h}}^{c_2^{2-h}} \frac{c_1^{1-h} - \xi}{c_1^{1-h} - c_2^{1-h}} \frac{d\eta}{c_1^{2-h} - c_2^{2-h}} + \int_{c_1^{1-h}}^{c_2^{1-h}} \frac{c_1^{2-h} - \eta}{c_1^{2-h} - c_2^{2-h}} \frac{d\xi}{c_1^{1-h} - c_2^{1-h}} =$$

$$= \frac{1}{(c_1^{1-h} - c_2^{1-h})(c_1^{2-h} - c_2^{2-h})} \left\{ \int_{c_1^{1-h}}^{c_2^{1-h}} \left(c_1^{2-h} - \xi^{\frac{2-h}{1-h}} \right) d\xi - \int_{c_1^{2-h}}^{c_2^{2-h}} \left(c_1^{1-h} - \eta^{\frac{1-h}{2-h}} \right) d\eta \right\} =$$

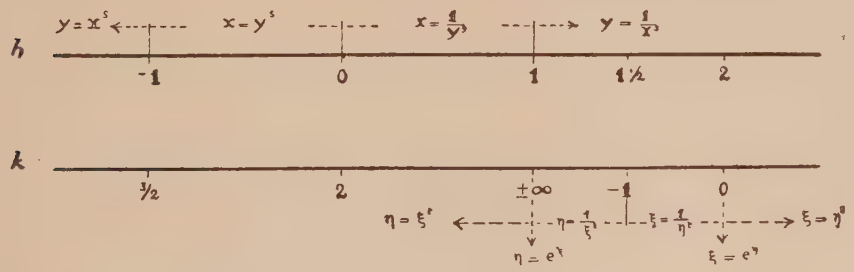
$$= \frac{1}{(c_1^{1-h} - c_2^{1-h})(c_1^{2-h} - c_2^{2-h})} \left\{ c_1^{2-h}(c_2^{1-h} - c_1^{1-h}) - \right.$$

$$\left. - \frac{1-h}{3-2h}(c_2^{3-2h} - c_1^{3-2h}) - c_1^{1-h}(c_2^{2-h} - c_1^{2-h}) + \frac{2-h}{3-2h}(c_2^{3-2h} - c_1^{3-2h}) \right\} =$$

$$= \frac{1}{(c_2^{1-h} - c_1^{1-h})(c_2^{2-h} - c_1^{2-h})} \left\{ \frac{c_2^{3-2h} - c_1^{3-2h}}{3-2h} - c_2^{1-h} c_1^{1-h}(c_2 - c_1) \right\} =$$

---

(10) Si potrebbe anche lasciar cadere la condizione $h \geq 1$. Per $h > 0$ la distribuzione resta iperbolica, per $h < 0$ diventa di tipo parabolico. La corrispondente (36) è di quest'ultimo tipo. Nel grafico accanto, nel quale si sono



indicate con s e t quantità > 1, con K l'esponente della (35) $\frac{2-h}{1-h}$, si è riassunta la variabilità della curva di concentrazione e di quella di distribuzione, in funzione di h.

$$= \frac{c_2^{3-2h} - c_1^{3-2h} - (3-2h)(c_2 - c_1)\, c_1^{2-h} c_1^{1-h}}{(3-2h)(c_2^{1-h} - c_1^{1-h})(c_2^{2-h} - c_1^{2-h})} \qquad (39)$$

Per $h = 1$:

$$R = \int_0^1 p\,dq - q\,dp = \int_1^s \frac{\xi}{(s-1)\log s}\,d\eta - \int_0^{\log s} \frac{\eta - 1}{s-1}\frac{d\xi}{\log s} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)\log s}\int_1^s \left(\log\eta - \frac{\eta-1}{\eta}\right) d\eta =$$

$$= \frac{1}{(s-1)\log s}\left\{ [\eta\log\eta]_1^s - \int_1^s d\eta - [\eta]_1^s + [\log\eta]_1^s \right\} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)\log s}\{ s\log s - s + 1 - s + 1 + \log s \} = \frac{s+1}{s-1} - \frac{2}{\log s}. \qquad (40)$$

Per $h = 2$:

$$R = \int_0^1 p\,dq - q\,dp = -\int_0^{-\log s} (1-\xi)\frac{s}{s-1}\frac{d\eta}{\log s} - \int_1^{\frac{1}{s}} \frac{\eta}{\log s}\frac{s}{s-1}\,d\xi =$$

$$= \frac{-s}{(s-1)\log s}\int_1^{\frac{1}{s}} \left[\log\xi + \frac{1-\xi}{\xi}\right] d\xi =$$

$$= \frac{-s}{(s-1)\log s}\left\{ [\xi\log\xi]_1^{\frac{1}{s}} - [\xi]_1^{\frac{1}{s}} + [\log\xi]_1^{\frac{1}{s}} - [\xi]_1^{\frac{1}{s}} \right\} =$$

$$= \frac{-s}{(s-1)\log s}\left\{ -\frac{1}{s}\log s + 2 - \frac{2}{s} - \log s \right\} =$$

$$= \frac{-s}{(s-1)\log s}\{ -\log s\,[s+1] + 2(s-1) \}.$$

E quindi

$$R = \frac{(s+1)}{(s-1)} - \frac{2}{\log s}. \qquad (41)$$

formula questa che non differisce dalla (40).

15) Se nella espressione di f considerata al numero precedente si pone $x = a + z$ si ottiene l'equazione proposta dal Pareto per la curva dei redditi, la quale in effetti dà un'adeguata rappresentazione solo del ramo di questa che corrisponde ai valori del reddito superiori a quello del reddito più frequente. La (36) fornisce pertanto (a mezzo delle (35)), l'equazione della curva di concentrazione relativa a tale tratto della curva dei redditi, nel caso $a = 0$. Nel caso generale occorre considerare la distribuzione f di polo $\varepsilon = c_1 - a$ anzichè c_1, di modo che, per quanto è stato dimostrato al n. 4, data la (36), le coordinate (p', q') del punto generico della curva di concentrazione risultano legate alle coordinate (p, q) dei punti della curva definita dalla (36), dalle relazioni :

$$\begin{cases} p' = p \\ q' = \dfrac{1}{A'} (A\, q - a\, p) \end{cases} \tag{42}$$

dove le lettere A denotano la intensità dei redditi medi delle due distribuzioni, e quindi $A' = A - a$.

Poichè la (36) può porsi sotto la forma :

$$\alpha^{h-2}\, \eta = (\alpha^{h-1}\, \xi)^{\frac{h-2}{h-1}} \quad , \quad \text{posto} \quad \sigma = \frac{c_2}{c_1} \, ,$$

risultano per le (35) le espressioni equivalenti :

$$\begin{cases} \xi = 1 - (1 - \sigma^{h-1})\, p \\ \eta = 1 - (1 - \sigma^{h-2})\, q \, . \end{cases}$$

E inoltre

$$A = \frac{h-1}{h-2} \frac{c_1^{2-h} - c_2^{2-h}}{c_1^{1-h} - c_2^{1-h}} = \frac{h-1}{h-2} \frac{1 - \sigma^{h-2}}{1 - \sigma^{h-1}} c_1$$

$$A' = A - a = \frac{(h-1)(1 - \sigma^{h-2})\, c_1 - (h-2)(1 - \sigma^{h-1})\, a}{(h-2)(1 - \sigma^{h-1})}$$

quindi, sostituendo nelle (42) si ha :

$$\begin{cases} p' = p \\ q' = \dfrac{(h-1)(1 - \sigma^{h-2})\, c_1\, q - (h-2)(1 - \sigma^{h-1})\, a\, p}{(h-1)(1 - \sigma^{h-2})\, c_1 - (h-2)(1 - \sigma^{h-1})\, a} \end{cases}$$

dalle quali si ricava

$$\begin{cases} \xi = 1 - (1 - \sigma^{h-1})\, p' \\ \eta = \dfrac{[(h-1)(1-\sigma^{h-2})c_1 - (h-2)(1-\sigma^{h-1})a]q' - (h-2)(1-\sigma^{h-1})a\,p'}{(h-1)\,c_1} \end{cases}$$

e quindi per la curva di concentrazione:

$$q' = \frac{\left[1 - \left\{1 - (1-\sigma^{h-1})\,p'\right\}^{\frac{h-2}{h-1}}\right](h-1)\,c_1 - (h-2)(1-\sigma^{h-1})\,a\,p'}{(h-1)(1-\sigma^{h-2})\,c_1 - (h-2)(1-\sigma^{h-1})\,a} \quad (43)$$

la quale essendo ordinariamente c_2 molto grande rispetto a c_1 e $h > 2$, si pone sotto la forma:

$$q' = \frac{\left[1 - (1-p')^{\frac{h-2}{h-1}}\right](h-1)\,c_1 - (h-2)\,a\,p'}{(h-1)\,c_2 - (h-2)\,a} \quad (44)$$

considerando $\sigma = 0$.

Per $a = 0$ e per $c_1 = a$ si ottengono dalle (43) e (44) rispettivamente le formule:

$$q' = 1 - \left\{1 - (1-\sigma^{h-1})\,p'\right\}^{\frac{h-2}{h-1}} \quad (43a)$$

$$q' = \frac{\left[1 - \left\{1 - (1-\sigma^{h-1})\,p'\right\}^{\frac{h-2}{h-1}}\right](h-1) - (h-2)(1-\sigma^{h-1})\,p'}{(h-1)(1-\sigma^{h-2}) - (h-2)(1-\sigma^{h-1})} \quad (43b)$$

$$q' = 1 - (1-p'')^{\frac{h-2}{h-1}} \quad (44a)$$

$$q'' = \left[1 - (1-p'')^{\frac{h-2}{h-1}}\right](h-1) - (h-2)\,p'' \quad (44b)$$

ma il caso $c_1 = a$ potrebbe presentarsi solo qualora la $f = \dfrac{1}{(z+a)^h}$ rappresentasse tutta la curva dei redditi, poichè in questo si assume come polo il minimo reddito della distribuzione.

Posto $\sigma = \dfrac{c_1}{c_2}$ la (39) si scrive

$$2S = \frac{1 - \sigma^{2h-3} - (2h-3)(1-\sigma)\,\sigma^{h-2}}{(2h-3)(1-\sigma^{h-1})(1-\sigma^{h-2})}$$

e quindi il rapporto di concentrazione relativo alla (43) risulta:

$$R = \frac{(h-1)\,c_1}{(2h-3)\,(1-\sigma^{h-1})} \cdot \frac{1-\sigma^{2h-3}-(2h-3)\,(1-\sigma)\,\sigma^{h-2}}{(h-1)\,(1-\sigma^{h-2})\,c_1-(h-2)\,(1-\sigma^{h-1})a} \qquad (45)$$

che se si pone $\sigma = 0$ (per $c_2 = \infty$) diventa:

$$R = \frac{(h-1)c_1}{2h-3} \cdot \frac{1}{(h-1)c_1-(h-2)a} \qquad (46)$$

Per $a = 0$ e $c_1 = a$ queste forniscono rispettivamente i valori:

$$R = \frac{1-\sigma^{2h-3}-(2h-3)\,(1-\sigma)\sigma^{h-2}}{(2h-3)\,(1-\sigma^{h-1})\,(1-\sigma^{h-2})} \qquad (45a)$$

$$R = \frac{h-1}{(2h-3)\,(1-\sigma^{h-1})} \cdot \frac{1-\sigma^{2h-3}-(2h-3)\,(1-\sigma)\sigma^{h-2}}{(h-1)\,(1-\sigma^{h-2})-(h-2)\,(1-\sigma^{h-1})} \qquad (45b)$$

$$R = \frac{1}{2h-3} \qquad (46a) \qquad\qquad R = \frac{h-1}{2h-3} \qquad (46b)$$

Per le due ultime formule vale naturalmente l'avvertenza già fatta a proposito delle (43*b* e 44*b*).

16) Consideriamo ora la funzione esponenziale $y = e^{-x}$ nel campo $c_1\,c_2$. Si ha

$$p(x) = \frac{1}{n}\int_{c_1}^{x} e^{-z}\,dz = \frac{e^{-c_1}-e^{-x}}{n} \quad \text{ove} \quad n = e^{-c_1}-e^{-c_2}$$

$$q(x) = \frac{1}{m}\int_{c_1}^{x} z e^{-z}\,dz = \frac{1}{m}\left\{\left[-z\,e^{-z}\right]_{c_1}^{x} + \int_{c_1}^{x} e^{-z}\,dz\right\} =$$

$$= \frac{1}{m}\left\{(c_1+1)\,e^{-c_1}-(x+1)\,e^{-x}\right\}.$$

essendo $m = (c_1+1)\,e^{-c_1}-(c_2+1)\,e^{-c_2}$.

Dalla prima si ricava per x la espressione

$x = -\log\left[e^{-c_1}-np\right]$ che, sostituita nella seconda dà

$$q = \frac{1}{m}\left\{(c_1+1)\,e^{-c_1}+\left[\log\left(e^{-c_1}-np\right)-1\right]\left[e^{-c_1}-np\right]\right\},$$

cioè

$$q = \frac{(c_1+1)\,e^{-c_1}+\left[\log\left\{e^{-c_1}-(e^{-c_1}-e^{-c_2})\,p\right\}-1\right]\left[e^{-c_1}-(e^{-c_1}-e^{-c_2})p\right]}{(c+1)\,e^{-c_1}-c_2+1)\,e^{-c_2}} \qquad (47)$$

Se si opera la trasformazione proiettiva

$$\begin{cases} p' = e^{-c_1} - (e^{-c_1} - e^{-c_2})\, p \\ q' = [(c_1 + 1)\, e^{-c_1} - (c_2 + 1)\, e^{-c_2}]\, q - (e^{-c_1} - e^{-c_2})\, p - c_1 e^{-c_1} \end{cases}$$

la (47) si riduce alla forma $q' = p' \log p'$ (48)

alla quale va associata la limitazione $e^{-c_1} \geqslant p' \geqslant e^{-c_2}$.

Procediamo al calcolo del rapporto di concentrazione. Si ha:

$$R = \int_0^1 p\,dq - q\,dp =$$

$$= \frac{1}{n\,m} \int_{c_1}^{c_2} \left\{ (e^{-c_1} - e^{-x})\, x e^{-x} + [(x+1)\, e^{-x} - (c_1 + 1)\, e^{-c_1}]\, e^{-x} \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{n\,m} \left\{ \int_{c_1}^{c_2} e^{-c_1}\, x e^{-x}\, dx + \int_{c_1}^{c_2} e^{-2x}\, dx - (c_1 + 1)\, e^{-c_1} \int_{c_1}^{c_2} e^{-x}\, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{n\,m} \left\{ m e^{-c_1} + \frac{1}{2} (e^{-2c_1} - e^{-2c_2}) - n\,(c_1 + 1)\, e^{-c_1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{n\,m} \left\{ -c_2 e^{-c_1} e^{-c_2} + \frac{1}{2} (e^{-2c_1} - e^{-2c_2}) + c_1 e^{-c_1} e^{-c_2} \right\};$$

e quindi

$$R = \frac{1}{2} \frac{e^{-2c_1} - e^{-2c_2} - 2\,(c_2 - c_1)\, e^{-(c_2 + c_1)}}{(e^{-c_1} - e^{-c_2})\, [(c_1 + 1)\, e^{-c_1} - (c_2 + 1)\, e^{-c_2}]} \qquad (49)$$

Nel caso in cui compaia come esponente della e una funzione lineare della x, cioè la funzione assume la forma $y = e^{-a(x - \varepsilon)}$ si osservi che la costante addittiva dell'esponente equivale ad una costante moltiplicativa per la funzione, che si può porre sempre uguale ad 1; la costante moltiplicativa equivale ad un cambiamento dell'unità di misura, quindi nella (48) si introdurranno in questo caso i valori $a\,c_1$ e $a\,c_2$ in luogo di c_1 e c_2 rispettivamente.

Per $c_2 = \infty$ la (49) fornisce per R il valore $R = \dfrac{1}{2\,(1 + c_1)}$;

per $c_1 = 0$ $R = \dfrac{1}{2} \dfrac{1 - e^{-2c_2} - 2\,c_2 e^{-c_2}}{(1 - e^{-c_2})\, [1 - (1 + c_2)\, e^{-c_2}]}$; per $c_2 = \infty$ e $c_1 = 0$ $R = \dfrac{1}{2}$.

17) Una generalizzazione del caso precedente si ha se si suppone che la legge di distribuzione sia espressa dal momento d'ordine $\frac{k}{h}$ della funzione esponenziale, $y = x^{\frac{k}{h}} e^{-x}$.

Le equazioni parametriche della curva di concentrazione diventano:

$$p(x) = \frac{1}{n}\int_{c_1}^{x} z^{\frac{k}{h}} e^{-z}\,dz = \frac{h}{n}\int_{\sqrt[h]{c_1}}^{\sqrt[h]{x}} t^{k+h-1} e^{-t^h}\,dt$$

$$q(x) = \frac{1}{m}\int_{c_1}^{x} z^{\frac{k+h}{h}} e^{-z}\,dz = \frac{h}{m}\int_{\sqrt[h]{c_1}}^{\sqrt[h]{x}} t^{k+2h-1} e^{-t^h}\,dt =$$

$$= \frac{1}{m}\left\{ c_1^{\frac{k+h}{h}} e^{-c_1} - x^{\frac{k+h}{h}} e^{-x} + \frac{k+h}{h}\, n\, p(x)\right\}$$

ove

$$n = h\int_{\sqrt[h]{c_1}}^{\sqrt[h]{c_2}} t^{k+h-1} e^{-t^h}\,dt\,,\quad m = h\int_{\sqrt[h]{c_1}}^{\sqrt[h]{c_2}} t^{k+2h-1} e^{-t^h}\,dt;$$

e quindi

$$R = \int_0^1 p\,dq - q\,dp = \frac{1}{m}\int_{c_1}^{c_2}\left[p(x)\frac{d}{dx}\left\{ c_1^{\frac{k+h}{h}} e^{-c_1} - x^{\frac{k+h}{h}} e^{-x}\right\} - \right.$$

$$\left. - \left\{ c_1^{\frac{k+h}{h}} e^{-c_1} x^{\frac{k+h}{h}} e^{-x}\right\}\frac{dp}{dx}\right] dx =$$

$$= \frac{h}{mn}\left\{ \left(c_1^{\frac{k+h}{h}} e^{-c_1} - c_2^{\frac{k+h}{h}} e^{-c_2}\right)\int_{\sqrt[h]{c_1}}^{\sqrt[h]{c_2}} t^{k+h-1} e^{-t^h}\,dt - \right.$$

$$\left. - 2\int_{\sqrt[h]{c_1}}^{\sqrt[h]{c_2}} \left(c_1^{\frac{k+h}{h}} e^{-c_1} - t^{\frac{k+h}{h}} e^{-t^h}\right) t^{k+h-1} e^{-t^h}\,dt \right\} =$$

$$= \frac{2h}{mn} \int_{\sqrt[h]{c_1}}^{\sqrt[h]{c_2}} t^{2(k+h)-1} e^{-2t^h} dt - \frac{c_1^{\frac{k+h}{h}} e^{-c_1} - c_2^{\frac{k+h}{h}} e^{-c_2}}{m} =$$

$$= \frac{h}{2^{2\frac{k}{h}+1} mn} \int_{\sqrt[h]{2c_1}}^{\sqrt[h]{2c_2}} \xi^{2(k+h)-1} e^{-\xi^h} d\xi - \frac{c_1^{\frac{k+h}{h}} e^{-c_1} - c_2^{\frac{k+h}{h}} e^{-c_2}}{m}.$$

Se ora poniamo $\int_0^x y^s e^{-y^r} dy = \Phi_{0,x}(s,r)$ e $\Phi_{0,\infty}(s,r) = I(s,r)$ il valore del rapporto di concentrazione risulta espresso dalla formula

$$R = \frac{1}{2^{\frac{2k+h}{h}} h} \frac{\Phi_{\sqrt[h]{c_1}}(2k+2h-1, h)}{\Phi_{\sqrt[h]{c_1}, \sqrt[h]{c_2}}(k+h-1, h)} \frac{}{\Phi_{\sqrt[h]{c_1}, \sqrt[h]{c_2}}(k+2h-1, h)} -$$

$$- \frac{c_1^{\frac{k+h}{h}} e^{-c_1} - c_2^{\frac{k+h}{h}} e^{-c_2}}{h \Phi_{\sqrt[h]{c_1}, \sqrt[h]{c_2}}(k+2h-1, h)} \qquad (50)\ (11)$$

---

(11) La (50) si calcola, in generale, mediante sviluppo in serie degli integrali Φ. È d'immediata verifica, tenuto presente che $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} \ldots$, che R assume la forma:

$$R = \frac{\sum_0^\infty \frac{(-1)^i 2^{i+1}}{\left(\frac{2k}{h}+i+2\right) i!} \left(c_2^{2\frac{k}{h}+i+2} - c_1^{2\frac{k}{h}+i+2}\right)}{\sum_0^\infty \frac{(-1)^i}{\left(\frac{k}{h}+i+1\right) i!} \left(c_2^{\frac{k}{h}+i+1} - c_1^{\frac{k}{h}+i+1}\right) \sum_0^\infty \frac{(-1)^i}{\left(\frac{k}{h}+i+2\right) i!} \left(c_2^{\frac{k}{h}+i+2} - c_1^{\frac{k}{h}+i+2}\right)} -$$

$$- \frac{c_1^{\frac{k}{h}+1} e^{-c_1} - c_2^{\frac{k}{h}+1} e^{-c_2}}{\sum_0^\infty \frac{(-1)^i}{\left(\frac{k}{h}+i+2\right) i!} \left(c_2^{\frac{k}{h}+i+2} - c_1^{\frac{k}{h}+i+2}\right)}.$$

Per $K = 0$, $h = 1$, la (50) si identifica con la (49)
Per $c_1 = 0$, $c_2 = \infty$ la (50) assume la forma

$$R = \frac{1}{2^{2\frac{k}{h}+1}} \frac{I\,(2k + 2h - 1\,,\,h)}{I\,(k + h - 1\,,\,h)\,I\,(k + 2h - 1\,,\,h)} \qquad (51)$$

poichè diventa nullo il 2^0 termine. Per $K = 1$, $h = 2$, questa formula fornisce la misura della concentrazione dell'energia cinetica tra le molecole di un gas, che risulta dalla legge di Maxwell della ripartizione normale delle velocità. Questa è espressa dalla formula $f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^2}{a^3} e^{-\frac{v^2}{2a^2}}$, a essendo il valore della componente della velocità media delle molecole del gas secondo ciascuno degli assi. Sostituendo in questa il valore di $E = \frac{m\,v^2}{2}$ e tenuto presente che deve essere, $f\,(v)\,d\,v = \varphi\,(E)\,d\,E$, si ha:

$$\varphi\,(E) = \frac{2}{\alpha^3\, m^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}\, E^{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{E}{m\alpha^2}}.$$

Poichè $0 \leq E \leq \infty$ i tre integrali Φ che in essa compaiono assumono la forma

$$I\,(s, 2) = \int_0^\infty x^s\, e^{-x^2}\, d\,x = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 3 \ldots (s-1)}{2^{\frac{s}{2}+1}} \sqrt{\pi} & \text{per } s \text{ pari} \\ \dfrac{2 \cdot 4 \ldots (s-1)}{2^{\frac{s+1}{2}}} & \text{per } s \text{ dispari,} \end{cases}$$

si ottiene quindi per R il valore

$$R = \frac{1}{4} \frac{I\,(5,2)}{I\,(2,2)\,I\,(4,2)} = \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4}} = \frac{4}{3\,\pi} = 0{,}4244 \ldots \qquad (52)\ (12).$$

18) Consideriamo, come ultimo esempio, una legge di distribuzione espressa dal momento d'ordine K (con K intero positivo) della curva di Gauss,

$$y = x^k\, e^{-x^2}.$$

---

(12) E. J. GUMBEL: *Ein Mass*, ecc. già cit., fornisce in questo caso un valore molto approssimato del rapporto di concentrazione, $R = 0{,}423$, calcolato con metodo grafico.

Le equazioni parametriche della curva di concentrazione sono:

$$p(x) = \frac{1}{n}\int_{c_1}^{x} z^k e^{-z^2} dz \qquad \text{dove } n = \int_{c_1}^{c_2} z^k e^{-z^2} dz$$

$$q(x) = \frac{1}{m}\int_{c_1}^{x} z^{k+1} e^{-z^2} dz \qquad \text{dove } m = \int_{c_1}^{c_2} z^{k+1} e^{-z^2} dz .$$

Poichè

$$\Phi_{0,x}(2n+1,2) = \int_0^x z^{2n+1} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\int_0^x z^{2n} e^{-z^2} dz^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-x^{2n} e^{-x^2} + n\int_0^x z^{2(n-1)} e^{-z^2} dz^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{ -x^{2n} e^{-x^2} - nx^{2(n-1)} e^{-x^2} - n(n-1) x^{2(n-3)} e^{-x^2} -$$

$$- \ldots - n(n-1)\ldots 3.2\, x^2 e^{-x^2} - n!\,(e^{-x^2} - 1)\Big\} =$$

$$= \frac{n!}{2}\left\{ 1 - e^{-x^2} \sum_0^n{}_i \frac{x^{2i}}{i!} \right\} \qquad (53)$$

$$\Phi_{0,x}(2n,2) = \int_0^x z^{2n} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\int_0^x z^{2n-1} e^{-z^2} dz^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ -x^{2n-1} e^{-x^2} + \int_0^n \frac{2n-1}{2} z^{2n-3} e^{-z^2} dz^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ -x^{2n-1} e^{-x^2} - \frac{2n-1}{2} x^{2n-3} e^{-x^2} - \right.$$

$$- \frac{(2n-1)(2n-3)}{4} x^{2n-5} e^{-x^2} - \ldots - \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5.3}{2^{n-1}} x e^{-x^2} +$$

$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2^{n-1}} \int_0^x e^{-z^2} dz \right\} =$$

$$= \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\left\{ \Phi_{0,x}(0,2) - e^{-x^2} \sum_1^n{}_i \frac{2^{i-1} x^{2i-1}}{1.3\ldots(2i-1)} \right\} =$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\left\{ \Phi_{0,x}(0,2) - e^{-x^2} \sum_1^n{}_i \frac{2^{2i-1} i!\, x^{2i-1}}{(2i)!} \right\} \qquad (54)$$

per calcolare il valore del rapporto di concentrazione ci converrà

distinguere due casi, a seconda che sia k pari o dispari. Nel 1° poniamo $k = 2h$

$$R = 1 - 2\int_0^1 q\,dp = 1 - \frac{2}{nm}\int_{c_1}^{c_2} \frac{h!}{2}\left\{ e^{-c_1} \sum_0^h{}_i \frac{{c_1}^{2i}}{i!} - e^{-x^2} \sum_0^h{}_i \frac{x^{2i}}{i!} \right\} e^{-x^2} x^{2h}\,dx =$$

$$= 1 - \frac{h!\, e^{-c_1^2} \sum_0^h{}_i \frac{{c_1}^{2}}{i!}}{m} + \frac{h!}{nm}\int_{c_1}^{c_2} e^{-2x^2} \sum_0^h{}_i \frac{x^{2(h+i)}}{i!}\,dx =$$

$$= 1 - \frac{h!\, e^{-c_1^2} \sum_0^h{}_i \frac{{c_1}^{2}}{i!}}{m} + \frac{h!}{nm\sqrt{2}} \sum_0^h{}_i \frac{1}{2^{h+i}\, i!} \int_{c_1\sqrt{2}}^{c_2\sqrt{2}} e^{-\xi^2}\, \xi^{2(h+i)}\,d\xi$$

Quest'ultima relazione si scrive simbolicamente:

$$R = 1 - \frac{h!\, e^{-c_1^2} \sum_0^h \frac{c_1^2}{i!}}{\Phi_{c_1,\, c_2}(2h+1,2)} + \frac{h! \sum_0^h \frac{1}{2^{h+2} i!}\, \Phi_{c_1\sqrt{2},\, c_2\sqrt{2}}(2h+2i,\,2)}{\sqrt{2}\, \Phi_{c_1,c_2}(2h,2)\, \Phi_{c_1,c_2}(2h+1,2)} \qquad (55)$$

Nel 2° caso poniamo $k = 2h - 1$

$$R = -1 + 2\int_0^1 p\,dq =$$

$$= -1 + \frac{2}{nm}\int_{c_1}^{c_2} \frac{(h-1)!}{2}\left\{ e^{-c_1^2} \sum_0^{h-1} \frac{{c_1}^{2i}}{i!} - e^{-x^2} \sum_0^{h-1} \frac{x^{2i}}{i!} \right\} e^{-x^2} x^{2h}\,dx =$$

$$= -1 + \frac{(h-1)!\, e^{-c_1^2} \sum_0^{h-1} \frac{{c_1}^{2i}}{i!}}{n} -$$

$$- \frac{(h-1)!}{nm\sqrt{2}} \sum_0^{h-1}{}_i \frac{1}{2^{h+i}\, i!} \int_{c_1\sqrt{2}}^{c_2\sqrt{2}} e^{-\xi^2}\, \xi^{2(h+i)}\,d\xi, \quad \text{e simbolicamente:}$$

$$R = -1 + \frac{(h-1)!\, e^{-c_1^2} \sum_0^{h-1} \frac{{c_1}^{2i}}{i!}}{\Phi_{c_1,\, c_2}(2h-1,2)} -$$

$$- \frac{(h-1)! \sum_0^{h-1} \frac{1}{2^{h+i}\, i!}\, \Phi_{c_1\sqrt{2},\, c_2\sqrt{2}}(2h+2i,2)}{\sqrt{2}\, \Phi_{c_1,c_2}(2h-1,2)\, \Phi_{c_1,c_2}(2h,2)}. \qquad (56)$$

Mercè le (53) e (54) entrambe le formule richiedono per il calcolo solo una tavola della funzione $\Phi_{o,x}(0,2)$.

Vediamo ora come esse si semplificano quando il carattere può assumere qualsiasi valore positivo di x.

Posto $c_1 = 0, \quad c_2 = \infty$ dalla (55) si ha:

$$R = 1 - \frac{h!}{I(2h+1,2)} + \frac{h!}{\sqrt{2}} \frac{\sum_0^h \frac{1}{2^{h+i} i!} I(2h+2i,2)}{I(2h,2)\, I(2h+1,2)} =$$

$$= 1 - 2 + \frac{h!}{\sqrt{2}} \frac{\sum_0^h \frac{1}{2^{h+i} i!} \frac{(2h+2i)!}{2^{2h+2i}(h+i)!}}{\frac{(2h)!}{2^{2h}} \frac{h!}{2}} =$$

$$= \frac{h!\sqrt{2}}{2^h (2h)!} \sum_0^h{}_i \frac{(2h+2i)!}{i!(h+i)!\, 2^{3i}} - 1 \qquad (55a)$$

e dalla (56):

$$R = -1 + \frac{(h-1)!}{I(2h-1,2)} - \frac{(h-1)!}{\sqrt{2}} \frac{\sum_0^{h-1} \frac{1}{2^{h+i} i!} I(2h+2i,2)}{I(2h-1,2)\, I(2h,2)} =$$

$$= -1 + 2 - \frac{(h-1)!}{\sqrt{2}} \frac{\sum_0^{h-1} \frac{(2h+2i)!}{i!\, 2^{h+i} (h+i)!\, 2^{2h+2i}}}{\frac{(h-1)!}{2} \frac{(2h)!}{2^{2h} h!}} =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}\, h!}{2^h (2h)!} \sum_0^{h-1}{}_i \frac{(2h+2i)!}{i!\,(h+1)!\, 2^{3i}} \qquad (56a)$$

Per $h = 0$ la (55a) fornisce per la misura della concentrazione degli errori causali il valore: $R = \sqrt{2} - 1$ (57)
e, per $h = 1$, per la misura della concentrazione delle velocità delle molecole dei gas il valore:

$$R = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(2 + \frac{4!}{2 - 2^3}\right) - 1 = \frac{7}{4\sqrt{2}} - 1 =$$

$$= \frac{7\sqrt{2} - 8}{8} = 0{,}2374\ldots \qquad (58)$$

Riassunto.

Richiamato il concetto di « curva di concentrazione » e determinata l'espressione analitica di questa, sia nel caso in cui il carattere non possa assumere che una successione discreta di valori, sia nel caso in cui possa assumere con continuità tutti i valori di un certo intervallo, ho mostrato come si deformi la curva di concentrazione al variare della legge di distribuzione delle intensità del carattere, mettendo in evidenza le relazioni grafiche che ne conseguono tra due curve di concentrazione, e il loro significato, dal punto di vista dinamico. Ho quindi considerato il caso in cui non varii la forma della curva di frequenza, ma bensì il polo della distribuzione, (ciò che corrisponde ad incrementare di una quantità costante la intensità del carattere spettante ad ogni elemento della distribuzione) dimostrando che le curve di concentrazione relative a due distribuzioni siffatte, sono proiettive e che il rapporto dell'area di concentrazione al triangolo formato dalla retta di equidistribuzione e dalle tangenti alla curva negli estremi non dipende dal polo della distribuzione ma solo dalla forma della curva di frequenza.

Tale proprietà mi ha suggerito di porre il « rapporto di concentrazione » sotto una forma leggermente diversa dalla ordinaria, la quale permette di ricondurre il calcolo di R per una distribuzione in posizione generica rispetto al polo a quello relativo ad una distribuzione in posizione particolare, per la quale riesca più semplice. Altra notevole semplificazione dei calcoli si consegue dalla osservazione che due distribuzioni, rappresentate da curve di frequenza simmetriche rispetto all'asse del campo di variabilità comune delle intensità del carattere, equivalgono a due distribuzioni rappresentate dalla stessa curva di frequenza, ma aventi poli diversi.

Ho quindi determinato le equazioni esplicite delle curve di concentrazione relative a vari tipi di distribuzione continue e ho proceduto al calcolo dei relativi valori del rapporto di concentrazione.

Il caso in cui le intensità del carattere siano raggruppate in classi a ciascuna delle quali corrisponda una frequenza costante ha messo in evidenza la proprietà delle curve di concentrazione di costituire l'inviluppo di un sistema di parabole del 2^0 ordine ad assi paralleli.

Dalla considerazione di una distribuzione lineare è seguìta una rettifica della formula del rapporto di concentrazione data dal

Gumbel nel 1928, che non può essere applicata nel caso di una distribuzione generica.

Il caso di una distribuzione circolare (o ellittica) ha fornito l'esempio di una curva di concentrazione simmetrica rispetto alla retta di equidistribuzione e alla parallela all'asse delle q condotta per il suo punto di mezzo ; proprietà questa comune, come ho dimostrato, a tutte o sole le curve di concentrazione relative a distribuzioni simmetriche.

Ho anche dimostrato che le curve di concentrazione relative a distribuzioni di tipo iperbolico possono classificarsi in tre tipi proiettivamente distinti : iperbolico, parabolico e logaritmico.

Considerati infine i tipi di distribuzione rappresentati dai momenti d'ordine $\frac{k}{h}$ della curva esponenziale e d'ordine k della curva di Gauss, ho stabilito per questi le formule del rapporto di concentrazione, pervenendo così al calcolo esatto di questo anche in casi, come in quello della misura della concentrazione delle velocità tra le molecole di un gas, nei quali qualche A. ha ritenuto impossibile il calcolo analitico.

PAUL LORENZ

Ueber Näherungsparabeln hohen Grades und ihre Aufgabe in der Konjunkturforschung

Näherungsparabeln zu Reihen aequidistanter Beobachtungswerte — nur von solchen soll im folgenden die Rede sein — spielen in der wesentlich auf statistische Beobachtungen gegründeten Wirtschaftsforschung, der *Konjunkturforschung*, eine grosse Rolle. *Die Aufgabe die sie dort zu erfüllen haben, ist keineswegs eine Aufgabe der Interpolation sondern der Kurvenanalyse*, das heisst eine Aufgabe ähnlich der, die den Fourierschen Reihen bei der Analyse periodischer physikalischer Erscheinungen zufällt. Nebenbei sei angemerkt, dass es auch in der Konjunkturforschung Probleme gibt, zu deren Analyse man sich mit Vorteil der Fourierschen Reihen bedient; jedoch sind diese Probleme wenig zahlreich und treten hinter den Problemen, zu deren mathematischer Analyse die ganzen rationalen Funktionen, d. h. die Funktionen, deren geometrische Bilder man Parabeln nennt, geeigneter sind, zurück.

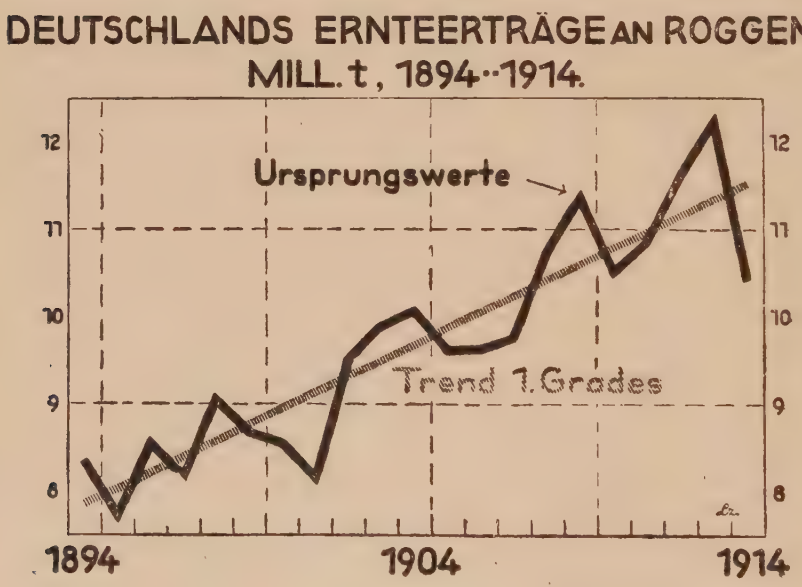
Worin besteht diese Analyse ? — Die Reihen von statistischen Beobachtungen, mit denen die Konjunkturforschung zu tun hat, erstrecken sich stets über einen mehr oder weniger ausgedehnten Zeitraum. Aus dieser Tatsache entspringt die Aufgabe, den Grundzug im Verlauf der Beobachtungswerte in einfacher, wenn möglich mathematisch erfassbarer Weise zu beschreiben.

Betrachtet man z. B. die Reihe der deutschen Erntezahlen von Roggen von 1894 bis 1914 in tausend Tonnen und ihre graphische Darstellung (Bild 1), (1) und stellt man sich die Aufgabe, den Ver-

(1) Aus : LORENZ, *Das Trendproblem in der Konjunkturforschung* in *Blätter für Versicherungsmathematik*, herausgegeben vom Deutschen Verein für Versicherungswissenschaft, 2. Band 7. Heft, 1. Juli 1932, Berlin, E. S. Mittler & Sohn.

lauf dieser Kurve zu beschreiben, so ist wohl das erste, was man zu sagen hat, dass die Kurve im ganzen gesehen ansteigt. Sie steigt nicht gleichmässig von Jahr zu Jahr an, ja sie steigt überhaupt nicht immer von Jahr zu Jahr an, sondern fällt sogar in einigen Jahren gegenüber dem Vorjahr, aber im ganzen genommen — oder wie man auch bisweilen sagt: im Durchschnitt und auf die Dauer — steigt sie eben doch. Sie besitzt eine über längere Zeit wirksame, sich mit grosser Beharrlichkeit durchsetzende Tendenz zum Anstieg, die zwar bisweilen von kurzfristigen Einflüssen lebhaft gestört wird, die aber diese kurzfristigen Störungen immer wieder überwindet.

Diese Tendenz gilt es, mit mathematischen Hilfsmitteln auf einfache Art zu beschreiben. In Bild 1 ist dies in einer für das Auge



befriedigenden Weise durch eine mittels der Methode der kleinsten Quadratsumme berechnete, gerade Linie geschehen. Wie diese gerade Linie zu deuten ist, soll uns hier nicht beschäftigen; ich verweise dieserhalb auf die in Fussnote 1 genannte Veröffentlichung und auf: LORENZ, *Der Trend*; Sonderheft 21 der "Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung", herausgegeben von Professor WAGEMANN,

Berlin, Reinmar Hobbing 1931. Nur darauf soll besonders hingewiesen werden, dass, wie man unmittelbar sieht, die Gerade für eine Interpolation der Beobachtungswerte nicht in betracht kommt. Man könnte einen Schritt weitergehen und die im Sinne der Methode der kleinsten Quadratsumme beste Näherungsparabel zweiten Grades berechnen. Es ist aber schon ohne Rechnung klar, dass auch diese Näherungsparabel keine Interpolationsformel darstellen würde; ebensowenig die Näherungsparabeln dritten, vierten und fünften Grades; vielleicht jedoch die Näherungsparabel zehnten Grades? Auch bei Verwendung einer Näherungsparabel so hohen Grades — man kann das leicht voraussehen — würde die Interpolation stellenweise recht schlecht sein. Ausserdem aber ist eine Näherungsparabel zehnten Grades einer statistischen Reihe von nur 21 Werten sicher kein Repräsentant des Hauptverlaufs dieser Reihe mehr — in der Sprache der Konjunkturforschung kein " Trend " — denn sie gibt bereits viel zu viel Einzelheiten der Bewegung der Ursprungsreihe.

Durch zu grosse Erhöhung des Grades verliert die Näherungsparabel eine wichtige Fähigkeit, nämlich den Hauptverlauf der Beobachtungsreihe in zweckmässiger Weise zu beschreiben, und gewinnt dafür sehr oft keine neue wertvolle Eigenschaft. Denn was wollte man schliesslich bei der Reihe der Ernteerträge interpolieren? Fehlende Angaben für einzelne Jahre? (1) Wenn solche Angaben wirklich fehlen würden, dann würde man den wahren Grössen des Ernteertrages jedenfalls viel näher kommen, wenn man aus vielleicht vorhandenen Angaben über die Ernte in einzelnen Landesteilen Schlüsse auf die Ernte im ganzen deutschen Reich ziehen würde, als mit Hilfe von Interpolationsformeln. Wären aber auch die nicht vorhanden, so könnten die Berichte der Wetterwarten über den Witterungsverlauf in Verbindung mit den Getreidepreisen dem Kenner der Sache eine wohl begründete Interpolation ermöglichen, besser begründet als es Formeln können, die auf diese Dinge keine Rücksicht nehmen. Ist aber die Reihe der jährlichen Angaben vollständig, dann hat eine Interpolation in diesem Falle überhaupt keinen Sinn, denn es wird ja wohl niemandem einfallen, durch Interpolation zwischen den Jahresernteerträgen auf die Vierteljahresernteerträge im Frühling, Sommer, Herbst und Winter schliessen zu wollen. Mit anderen Worten heisst das:

---

(1) Vgl. LORENZ, *Das Trendproblem in der Konjunkturforschung*, s. Fussnote 1.

Wenn wir in der Zeichnung die Ernteerträge durch Punkte repräsentieren, deren Ordinaten den Ernteerträgen proportional sind, dann haben von dem geraden oder auch krummen Trend nur diejenigen Punkte eine sachliche Bedeutung, die dieselben Abszissen haben wie die Beobachtungswerte. Die Verbindungsstücke des Trends zwischen diesen Punkten haben hier ebensowenig eine sachliche Bedeutung wie die Verbindungsstrecken zwischen den empirischen Punkten. Sie haben, ohne einen sachlichen Sinn zu besitzen, einzig und allein den Zweck, dem Auge die Verfolgung der Punktreihe zu erleichtern.

Es soll mit dem Gesagten nicht überhaupt bestritten werden, dass es Fälle geben kann, in denen eine Interpolation doch sinnvoll ist, man darf aber getrost behaupten, dass das Problem der Interpolation für die Konjunkturforschung von ganz untergeordneter Bedeutung ist, und dass, wenn man schon gelegentlich eine formale Interpolation ausführen will, die einfachsten Interpolationsformeln ebenso zuverlässig — oder ebenso unzuverlässig — sind wie die kompliziertesten.

Es bleibt also als Aufgabe der Berechnung von Näherungsparabeln im wesentlichen nur die sogenannte Trendanalyse, das heisst die Ermittlung und mathematische Beschreibung des Hauptverlaufs von Beobachtungsreihen, der selbstverständlich durchaus nicht immer durch eine gerade Linie befriedigend dargestellt werden kann, sondern sehr oft ein gekrümmtes und bei langen Beobachtungsreihen auch wellenförmiges Aussehen annimmt. Es ist klar, dass man zu dieser Analyse an sich auch andere Funktionstypen als die ganzen rationalen verwenden kann, jedoch besitzen die letzteren, wie ich in den bereits genannten Veröffentlichungen dargelegt habe, soviel Vorzüge vor allen anderen Funktionstypen, dass es berechtigt ist, sich mit ihnen eingehendst zu befassen.

Die Darstellung der Näherungsparabeln durch orthogonale ganz rationale Funktionen.

Setzt man die Gleichung der Näherungsparabel k ten Grades in der Form

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k$$

an, so bereitet die Bestimmung der Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ für die Parabeln der niederen Grade zwar keine grossen Schwierigkeiten; sie ist aber selbst, für die niederen Grade abgesehen von den Graden null

und eins unzweckmässig. Ist k grösser, so wird die Bestimmung der Koeffizeinten mühsam, insbesondere wegen der Empfindlichkeit, der Gleichungssysteme, aus denen die Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ zu berechnen sind, gegen, selbst gering scheinende, Aenderungen der Gleichungskonstanten (1). Dieser Umstand verbietet, die Gleichungskonstanten zu bequem zu handhabenden Zahlen abzurunden; man ist vielmehr genötigt, selbst bei mässig hohem Grade der zu berechnenden Näherungsparabel mit recht unbequem langen Zahlen zu rechnen. Einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten bietet die Methode der Berechnung mit Hilfe gewisser, von Tschebyscheff eingeführter orthogonaler ganzer rationaler Funktionen. Ein auf diesen Funktionen aufgebautes Verfahren ist in "Der Trend" (*s. o.*) ausführlich dargelegt. Es sei daher gestattet, hier nur seine Grundgedanken anzudeuten.

In der Gleichung

$$(1) \qquad y = a_0 + a_1 X_1(x) + a_2 X_2(x) + \ldots + a_k X_k(x)$$

mögen die a_i Konstanten und die $X_i(x)$ ganz rationale Funktionen i ten Grades der unabhängigen Veränderlichen x bedeuten. y ist dann eine ganz rationale Funktion k ten Grades der Veränderlichen x. Die Berechnung einer Näherungsparabel zu einer statistischen Reihe mit den aequidistanten empirischen Werten w_x erfolge nach der Methode der kleinsten Quadratsumme, also nach dem Postulate

$$\sum_x \left[a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_k X_k - w_x\right]^2 \qquad \text{Minimum !}$$

wobei die Summen über sämtliche Werte der unabhängigen Veränderlichen x, für welche Beobachtungen vorliegen, zu erstrecken sind. An die Funktionen X_i stellen wir folgende Forderungen, die sie zu orthogonalen Funktionen machen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \sum_x X_i &= 0 \\ \sum_x X_i X_j &= 0 \quad \text{für } i \neq j \quad \text{und} \\ \frac{1}{N} \sum_x X_i^2 &= 1 . \end{aligned}$$

(1) Vgl. LORENZ, *Gegen einen gewissen Missbrauch mathematischer Formulierungen in der theoretischen Nationalökonomie.* «Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik», 134. Band, 1931.

Wenn die Funktionen X_i diese Forderungen, erfüllen, dann ergibt sich, wie man leicht sieht:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{N} \sum_x w_x \\
a_1 &= \frac{1}{N} \sum_x w_x X_1 \\
a_2 &= \frac{1}{N} \sum_x w_x X_2 \qquad (3) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
a_k &= \frac{1}{N} \sum_x w_x X_k .
\end{aligned}
$$

Daraus ist ohne weiteres klar, dass es gleichgültig ist, mit wieviel Gliedern die Näherungsfunktion

$$y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_k X_k$$

angesetzt worden ist. Immer erhalten die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die gleichen Werte. Die Näherungsfunktion vierten Grades z. B. geht mithin aus der Näherungsfunktion dritten Grades

$$y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$$

einfach durch Hinzufügen des Gliedes $a_4 X_4$ hervor und lautet bei unveränderten a_0, a_1, a_2 und a_3

$$y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_3 + a_3 X_3 + a_4 X_4 .$$

Umgekehrt geht die Näherungsfunktion dritten Grades aus der vierten Grades einfach durch Weglassen des Gliedes $a_4 X_4$ hervor. Es ist klar, dass diese Eigenschaft der Darstellung der Näherungsparabeln durch orthogonale Funktionen nach der rechentechnischen Seite eine grosse Erleichterung bedeutet, denn bei dem Ansatz

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k$$

erfordert eine Erhöhung oder Erniedrigung des Grades der Näherungsparabel die Neubestimmung eines grossen Teils oder aller Koeffizienten

$c_0, c_1, c_2, \ldots$ ein Umstand, der umso beschwerlicher ist, als sich die Werte der Koeffizienten c nicht auf ähnlich einfache Weise ergeben wie die Koeffizienten a bei der Verwendung von orthogonalen Funktionen gemäss den Gleichungen (3). Der Zwang, den Näherungsgrad einer Parabel zu verändern, ist aber bei der mathematischen Analyse von statistischen Reihen sehr oft vorhanden. Schliesslich verdient noch angemerkt zu werden, dass den Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ im Gegensatz zu den Koeffizienten $c_0, c_1, c_2 \ldots$ eine einfache durchsichtige sachliche Bedeutung zukommt, die sie zu Korrelationsuntersuchungen besonders geeignet macht.

Ein Weg, die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zu berechnen, wird unmittelbar durch die Gleichungen (3) gezeigt. Voraussetzung ist dabei, dass die Funktionen $X_1, X_2, \ldots$ bekannt sind.

Die Funktionen X (x).

Aus der ersten und zweiten der Bedingungen (2) hat TSCHEBYSCHEFF bereits im Jahre 1859 (1) eine Rekursionsformel für die Darstellung der Funktionen X, abgesehen von einer multiplikativen Konstanten, bei Beschränkung auf aequidistante Beobachtungswerte abgeleitet In einer späteren Arbeit (2), vom Jahre 1875, gelangt er erstmalig zu einer expliziten Darstellung der Funktionen X in allgemeiner Form, ebenfalls bei Beschränkung auf aequidistante Beobachtungswerte und wieder abgesehen von einer multiplikativen Konstanten. Durchläuft x die Werte 1, 2, 3... N, dann ist nach Tschebyscheff

$$X_k = c_k \sum_{\lambda=0}^{k} (-1)^\lambda \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(N-\lambda)\,\Gamma(k+\lambda+1)}{\Gamma^2(\lambda+1)\,\Gamma(k-\lambda+1)\,\Gamma(N-k)} \cdot \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\lambda)}.$$

Da $\Gamma(y) = (y-1)!$ $\Gamma(y-1)$ ist, kann man dafür auch schreiben

$$X_k = c_k\, k!\, k! \sum_{\lambda=0}^{k} (-1)^\lambda \binom{k+\lambda}{\lambda} \binom{N-1-\lambda}{k-\lambda} \binom{x-1}{\lambda}.$$

Diese Darstellungsweise der Funktionen X ist, ebenso wie eine ähnliche, von Esscher gegebene (3) nicht bequem für die Auswertung.

---

(1) *Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés*, Oeuvres T. I, p. 473..498.

(2) *Sur l'interpolation des valeurs équidistantes.* Oeuvres T. II., p. 219..242.

(3) FREDRIK ESSCHER, *On graduation according to the method of least squares by means of certain polynomials* «Försäkringsaktiebolaget Skandias Festskrift». Stockholm 1930.

Da sich zeigen lässt, dass die Funktionen entweder eine Symmetrieachse oder einen Mittelpunkt besitzen, können sie entweder als Summen von nur geraden oder als Summen von ausschliesslich ungeraden Potenzen des Arguments dargestellt werden. Die Zahl der Summanden, aus denen sich eine Funktion aufbaut, reduziert sich dadurch bei den ungeraden Funktionen auf die halbe Anzahl der vorstehenden Darstellung durch Tschebyscheff, bei den geraden Funktionen auf die halbe Anzahl plus ein. Anderseits ist es aber unerwünscht, die bequeme und durchsichtige Darstellung mit Hilfe von Binomialkoeffizienten, die zudem der geforderten Aequidistanz der Werte x_1, x_2, x_3,... x_N am besten entspricht, fallen zu lassen und durch eine — wenig durchsichtige und unhandliche — Darstellung mit Hilfe von Potenzen zu ersetzen. Das zu erstrebende Ziel dürfte sein, eine Darstellung mit Hilfe von Binomialkoeffizienten (oder Faktoriellen) zu gewinnen, die daneben die genannten Vorzüge der Potenzdarstellung besitzt.

Um eine solche Darstellung zu gewinnen, kann man von der Definition der Funktion X_k durch eine Determinante ausgehen. Wir definieren

$$(4) \qquad X_k = b_k \begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & \dots & x^k \\ \Sigma x^0 & \Sigma x^1 & \Sigma x^2 & \dots & \Sigma x^k \\ \Sigma x_1 & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \dots & \Sigma x^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma x^{k-1} & \Sigma x^k & \Sigma x^{k+1} & \dots & \Sigma x^{2k-1} \end{vmatrix}$$

Dabei ist b_k eine Konstante, und die Summen sind über eine Folge von N aequidistanten Werten des Arguments x zu erstrecken.

Die so definierten Funktionen X_k erfüllen, wie man leicht zeigt, die Orthogonalitätsbedingungen (2); b_k soll dabei im besonderen noch der Bedingung unterworfen werden, dass das Glied mit der höchsten Potenz von x in X_k das positive Vorzeichen erhält.

Für die weitere Behandlung muss man die Fälle, in denen N gerade ist, von den Fällen, in denen N ungerade ist, scheiden. Ist N gerade, so lassen wir x die Werte

$$(5) \quad -(N-1), -(N-3), \dots -3, -1, 1, 3, \dots (N-3), (N-1)$$

durchlaufen, im anderen Falle die Werte

$$(6) \quad -\frac{N-1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \dots -1, 0, 1, \dots \frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2}.$$

Die Determinante (4) lässt sich in jedem Falle zerlegen und umformen und man findet nach einer Reihe von Umformungen, z. B. für gerades N

$$(7)\quad X_{2l+1} = \left[\left\{ \Delta_{i=0}^{l} \frac{\left(\frac{x}{2}+i\right)^{(2i+1)}}{\left(i+\frac{1}{2}\right)^{(i)}} \left(\frac{N+1}{2}+l\right)^{(l-i)} \left(\frac{N-3}{2}-i\right)^{(l-i)} \right. \right.$$
$$\left. \left. \left(l+i+\frac{1}{2}\right)^{(i)} \right\} .2:l!\,l! \right] .(2l+1)! \sqrt{\frac{4l+3}{(N^2-1^2)(N^2-2^2)\ldots(N^2-[2l+1]^2)}}$$

$$(8)\quad X_{2l} = \left[\Delta_{i=0}^{l} \binom{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+i}{2i} \binom{\frac{N}{2}+l}{l-i} \binom{\frac{N}{2}-i-1}{l-i} \right.$$
$$\left. \frac{\binom{l+i-\frac{1}{2}}{i} 2^{2i}}{\binom{l}{i}\binom{l}{i}} \right] .(2l)! \sqrt{\frac{4l+1}{(N^2-1^2)(N^2-2^2)\ldots(N^2-[2l]^2)}},$$

wobei die Wurzeln mit positiven Vorzeichen zu nehmen sind. Das Zeichen $\Delta_{i=0}^{l}$ bedeutet, dass man die l te endliche Differenz nach i des hinter $\Delta_{i=0}^{l}$ stehenden Ausdrucks formal ansetzen und dann statt i null setzen soll. Die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke sind, wie ich an anderem Orte (1) zeige, für alle Werte, die x bei der Summation gemäss (5) durchläuft, ganze Zahlen.

Die numerische Auswertung der Funktionen X ist bis zum sechsten Grad und bis zum Reihenumfang $N = 80$ im deutschen Institut für Konjunkturforschung erfolgt. Die Tabellen sind in " Der Trend " veröffentlicht.

Wir geben nachstehend graphische Darstellungen der Funktionen für die Reihenumfänge $N = 12$ und $N = 44$. Für den Reihenumfang

---

(1) « Journal für die reine und angewandte Mathematik » (Crelles Journal). Band 168, Heft. 3, 1932. Berlin, Walter de Grugter & Co.

$N = 12$ ist der Verlauf sämtlicher überhaupt möglichen Funktionen X_0, X_1, X_2, usw. bis X_{11} durch Punktreihen angedeutet. Für den Reihenumfang $N = 44$ sind die Funktionen X_0, X_1, X_2, usw. bis X_{23}

Die Funktionen X_0, X_1, ... X_{11} für $N = 12$.

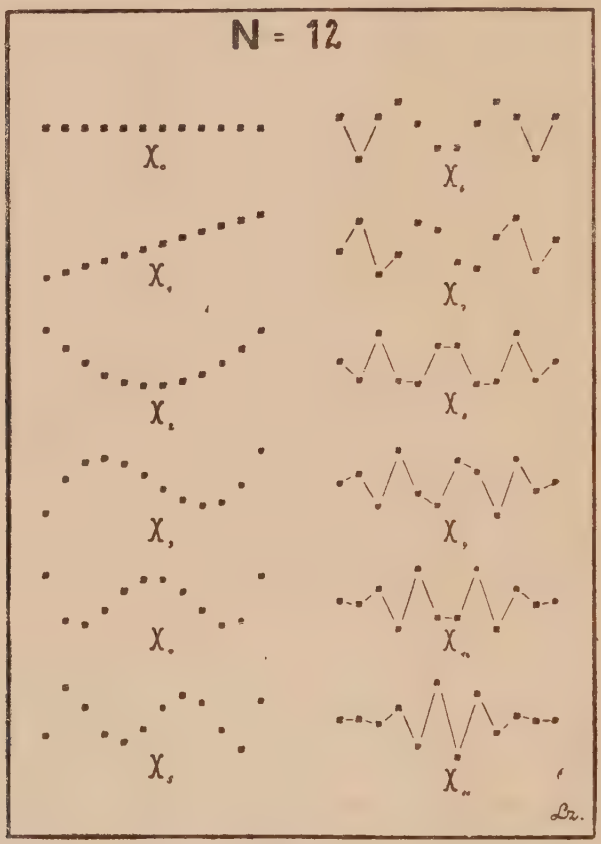


Bild. 2.

und ausserdem X_{43} angedeutet. Wir sagen absichtlich " angedeutet " und nicht " dargestellt ", weil nur die Funktionswerte derjenigen Argumentwerte dargestellt wurden (durch Kreuzchen) über die die Summen in den Gleichungen (2), (3) und (4) zu erstrecken waren, das heisst der Werte (5). Für $N = 12$ sind das die Werte

$$-11, -9, -7, \ldots 7, 9, 11$$

für $N = 44$

$$-43, -41, -39 \ldots 39, 41, 43.$$

Die Funktionen X_0, X_1, ... X_{23} und X_{43} für $N = 44$.

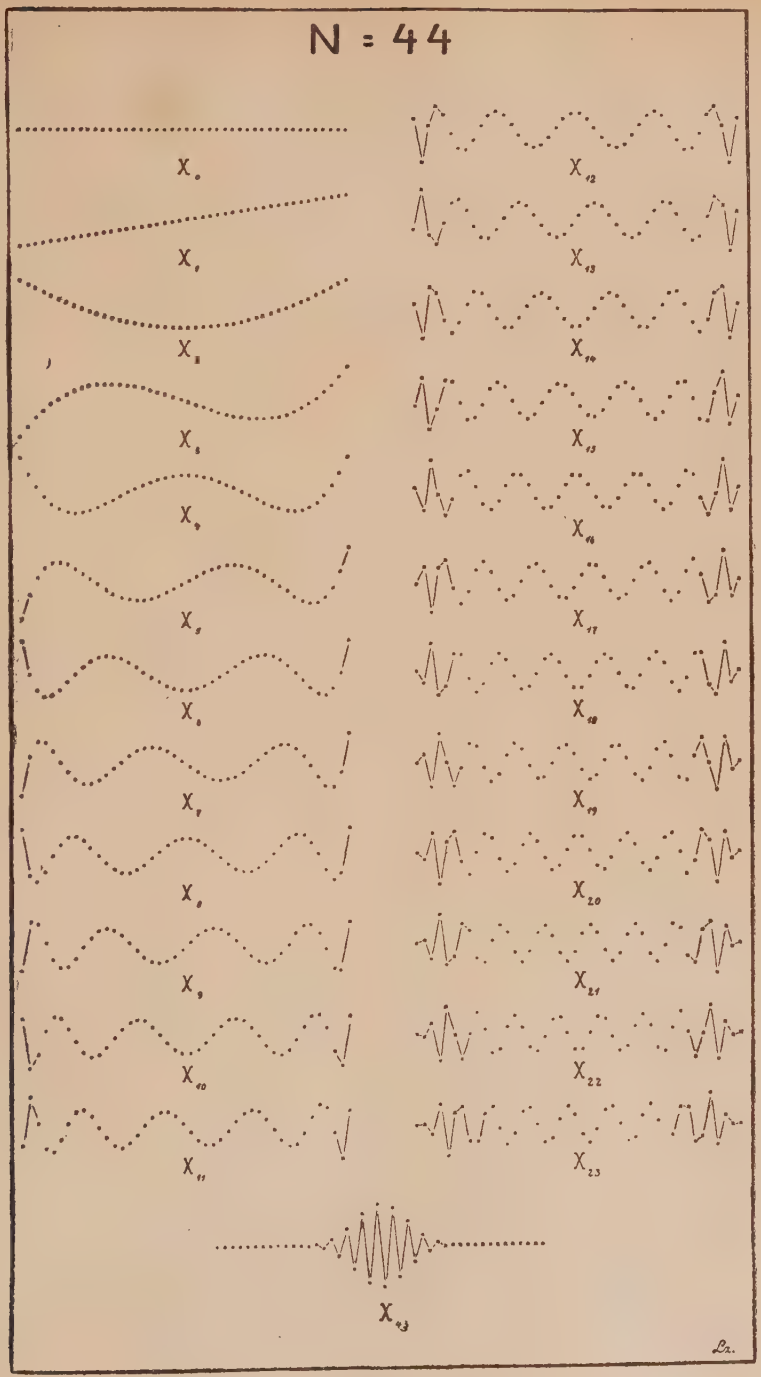


BILD 3.

Bei den Funktionen nicht sehr hohen Grades — für $N = 12$ bei X_0 bis etwa X_7, für $N = 44$ bei X_0 bis etwa X_{13} — schliesst man aus dem Verlauf der Punktreihe leicht mit ziemlicher Sicherheit auf den Verlauf der Funktionen auch zwischen den berechneten Funktionswerten. Bei den Funktionen höheren Grades geben die gezeichneten Punktreihen nur in einer gewissen Entfernung von den Enden der Beobachtungsstrecke brauchbare Anhalte für die Beurteilung des Verlaufs zwischen den markierten Punkten, an den Enden dagegen keineswegs. Zur Veranschaulichung der Verhältnisse bringen wir eine Tabelle für $N = 12$, in der ausser den Werten der Funktionen für $x = 1, 3, 5, \ldots 11$ auch die Werte für $x = 0, 2, 4, \ldots 12$ und zwar mit anderen Lettern angegeben sind.

$N = 12$

x	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	x
0	— 1,228	0,000	1,339	0,000	— 1,602	0,000	0
1	— 1,034	— 0,798	0,950	1,138	— 0,794	— 1,905	1
2	— 0,506	— 1,258	— 0,009	1,414	0,863	1,237	2
3	0,207	— 1,163	— 1 004	0,553	1,701	1,361	3
4	0,888	— 0,503	— 1,417	— 0,859	0,662	2,291	4
5	1,293	0,473	— 0,882	— 1,642	— 1,418	— 0,681	5
6	1,216	1,301	0,416	— 0,839	— 2,013	— 3,871	6
7	0,569	1,430	1,614	1,230	0,662	0,227	7
8	— 0,523	0,494	1,452	2,365	3,960	9,927	8
9	— 1,603	— 1,282	— 0,828	— 0,428	— 0,170	— 0,045	9
10	— 1,751	— 2,478	— 3,622	— 6,318	— 14,691	— 52,461	10
11	5,569	0,313	0,149	0,060	0,019	0,004	11
12	7,674	13,518	27,832	68,789	215,262	980,767	12

Will man hiernach den Verlauf der Funktionen von $x = -12$ bis $x = 12$ zeichnen, so muss man beachten, dass die geraden Funktionen symmetrisch zu der Linie $x = 0$ und die ungeraden Funktionen zentrisch, mit dem Ursprung des Arguments als Zentrum, sind. Es gilt also $X_{2l}(-x) = X_{2l}(x)$ und $X_{2l+1}(-x) = -X_{2l+1}(x)$. Bei

$N = 44$ sind die Funktionswerte am rechten Ende der Beobachtungsstrecke für X_{17} bis X_{22} die folgenden:

$N = 44$

x	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	X_{21}	X_{22}
39	2,07494	1,90717	1,64784	1,34722	1,04667	0,77489
40	1,98626	2,48085	2,98966	3,58848	4,39214	5,57741
41	—1,01352	— 0,76719	—0,55924	— 0,39281	— 0,26595	— 0,17457
42	— 5,24086	— 6,60747	— 8,67827	—11,90329	—17,05579	—25,50999
43	—0,16571	0,11033	0,07136	0,04480	0,02729	0,01612

Man erkennt aus diesen Tabellen wie aus den Bildern (2) und (3) zweierlei:

1) wenn k sehr gross ist, insbesondere wenn es sich seinem Maximalwert $N-1$, nähert, dann nehmen die Funktionen X_k an den Rändern des Intervalls für die Argumentwerte $\mp(N-1)$, $\mp(N-3)$, $\mp(N-5)$, ... Werte an, die sich nur wenig von null unterscheiden: ganz besonders deutlich wird dies durch die letzte Punktreihe des Schaubildes 3, das die Werte der Funktion X_{43} für $N = 44$ für die Argumente -43, -41, -39, ... 39, 41, 43 angibt.

2) Wenn k sehr gross ist, insbesondere wenn es sich seinem Maximalwert $N-1$ nähert, nehmen die Funktionen X_k an den Rändern des Intervalls für Argumentwerte, die zwischen $\mp(N-1)$, $\mp(N-3)$, $\mp(N-5)$, ... liegen, recht beträchtliche absolute Grössen an. Der Verlauf der Funktionen schwankt gegen die Ränder des Intervalls zu immer stärker und schneidet die Abszissenachse in der Nachbarschaft der Argumentwerte $\mp(N-1)$, $\mp(N-3)$, $\mp(N-5)$ ...

Dieses Verhalten der Funktionen X macht es jedenfalls zweifelhaft, ob Näherungsparabeln hohen Grades zu einer Reihe von Beobachtungswerten an den Enden der Reihe noch zu Interpolierungen dienen können. Tatsächlich können sie es nicht, wie man an Zahlenbeispielen leicht zeigen kann, und gar eine Extrapolation, sei es auch nur um ein halbes Intervall, führt zu Resultaten, die z. B. bei Wirtschaftsreihen meist keinen sachlichen Sinn haben können. Geht man etwas vom Rande weg auf die Mitte der Beobachtungsparabeln zu, so kann die Interpolation auch bei Näherungsparabeln hohen Grades zu sachlich plausiblen Ergebnissen führen. Es fragt sich nur,

ob bzw. wann die Interpolation bei statistischen Reihen überhaupt eine sachliche Bedeutung hat. Damit kommen wir auf einen Punkt, den wir bereits erörtert haben ; wir wiederholen, dass die rein formale Interpolation bei statistischen Reihen nur ausnahmsweise bedeutungsvoll ist und dass in diesen Ausnahmefällen die einfachsten Interpolationsformeln, also in der Regel die lineare Interpolation gleichgute, wenn nicht bessere Dienste leisten als komplizierte. Diese Feststellung tut aber dem Werte der Berechnung von Näherungsparabeln — unter Umständen auch hohen Grades — zu Wirtschaftsreihen, oder wie der Konjunkturforscher sagt, der " Trendberechnung " nicht den geringsten Abbruch, denn die Aufgabe der Trendberechnung ist nicht Interpolation sondern Kurvenanalyse.

Der Aufbau der Näherungsparabeln einer statistischen Reihe.

Aus den Elementarfunktionen X_i bauen sich die Näherungsfunktionen y_k einer statistischen Reihe gemäss der Formel

$$(1) \qquad y_k = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_k X_k$$

auf, wobei sich die a_i aus den Gleichungen des Systems (3) bestimmen. Von diesen Näherungsparabeln haben, wie bereits gesagt, zunächst nur diejenigen Punkte eine unmittelbare sachliche Bedeutung, nämlich : Punkte des " Hauptverlaufs " der Beobachtungsreihe zu sein, welche zeitlich mit empirischen Werten zusammenfallen. Ob interpolierte Werte sinnvoll sind, richtet sich nach dem sachlichen Inhalt der empirischen Reihe und dem Grade der Annäherung durch die Näherungsparabel. Dabei muss unterschieden werden, ob dem interpolierten Wert *als Punkt des Hauptverlaufs* eine selbständige Bedeutung zukommt (in diesem Falle handelt es sich, wie man sieht, nicht eigentlich um eine Interpolation) oder ob er den nicht empirisch gefundenen Wert der Originalreihe für ein gewisses Argument ersetzen soll. In diesem Falle handelt es sich um eine Interpolation im eigentlichen Sinne. Näheres über den Wert oder Unwert einer solchen Interpolation ist bereits gesagt worden.

Die Elementarfunktionen sind symmetrisch in bezug auf eine Achse oder zentrisch, die Produkte $a_i X_i$, die gewissermassen die Bausteine der Näherungsparabel sind, sind gleichfalls symmetrisch oder zentrisch. Die Multiplizierung mit dem Faktor a_i ändert nur die Amplitude (wenn $a_i \neq 1$) und kehrt unter Umständen das Vorzeichen um. In Bild 4 bringen wir die Funktionen $a_i X_i$ für die Heirats-

ziffer in Grossbritannien von 1870 bis 1913. Die Gleichung der Näherungsparabel neunten Grades für diese statistische Reihe lautet (1)

$$(9) \quad y = 155{,}93 - 2{,}20\,X_1 + 3{,}32\,X_2 - 3{,}65\,X_3 - 0{,}71\,X_4 + 3{,}47\,X_5 - 0{,}66\,X_6 + 1{,}28\,X_7 - 1{,}17\,X_8 + 0{,}19\,X_9.$$

Man erkennt sowohl aus Bild 4 wie aus der Gleichung (9) dass die Glieder $-0{,}71\,X_4$ und $-0{,}66\,X_6$ zur Formung der Näherungsparabel wenig beitragen. Handelt es sich darum, den Trend oder was dasselbe ist, Hauptverlauf der statistischen Reihe festzulegen, so wird man die auf $a_5\,X^5$ folgenden Glieder unterdrücken dürfen, also

$$y = 155{,}93 - 2{,}20\,X_1 + 3{,}32\,X_2 - 3{,}65\,X_3 - 0{,}71\,X_4 + 3{,}47\,X_5$$

als die Gleichung des Hauptverlaufs ansehen dürfen. (Näheres hierüber in den bereits genannten Veröffentlichungen des Verfassers). Wie diese Näherungsparabel gewissermassen Stein auf Stein aus den Gliedern $a_0, a_1X_1, a_2X_2, \ldots$ entsteht, ist in Bild (5) dargestellt.

Diese Näherungsparabeln

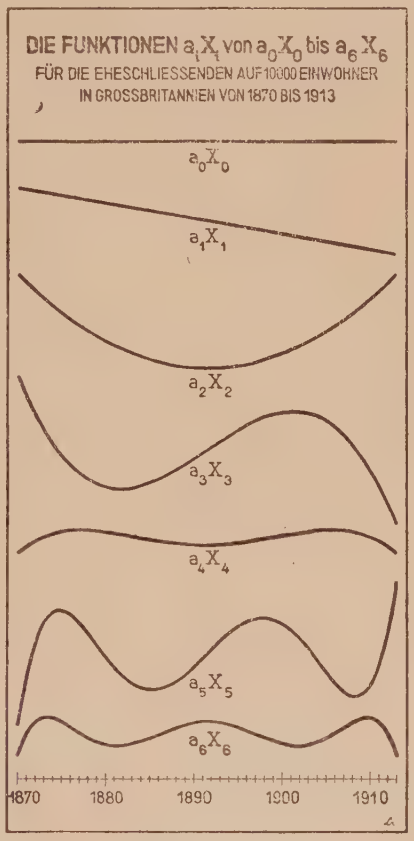


BILD 4.

$$y_0 = a_0$$
$$y_1 = a_0 + a_1X_1$$
$$y_2 = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(1) Vgl. LORENZ, *Der Trend*, Sonderheft 21 der « Vierteljahreshefte für Konjunkturforschung », herausgegeben von Prof. Wagemann, Berlin, Reimar Hobbing, 1931.

sind — im allgemeinen vom vierten Grade ab — weder symmetrisch noch zentrisch, können vielmehr recht verschiedene Gestalten annehmen.

In einem letzten Bild (Bild 6), das konjunkturtheoretisch besonders grosses Interesse bietet, worüber man jedoch den in Fussnote 1 zitierten Aufsatz " Das Trendproblem in der Konjunkturforschung " (dem das Bild entnommen ist) nachlesen wolle, zeigen wir noch den Verlauf einer Näherungsparabel ganz aussergewöhnlich hohen, nämlich des zweiundzwanzigsten Grades. Als anzunähernde Beobachtungsreihe dienten wieder die Zahlen der Eheschliessenden auf 10 000 Einwohner im Grossbritannien von 1870 bis 1913.

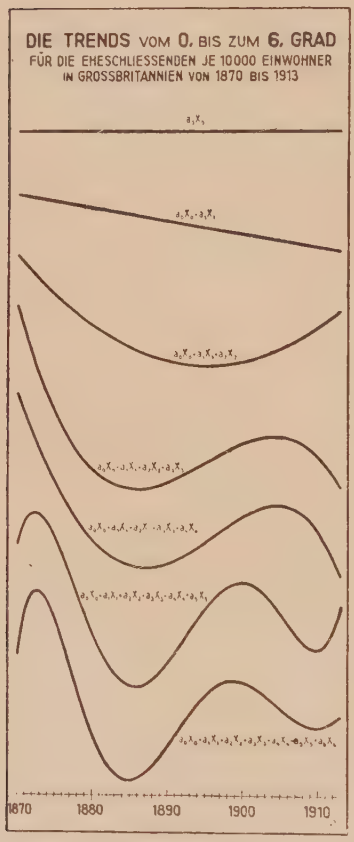


BILD 5.

Die zu den Abszissen der Beobachtungswerte gehörigen Punkte der Näherungsparabel 22. Grades fallen mit den Beobachtungswerten fast zusammen. Die Parabel 22. Grades gibt daher eigentlich nichts Neues, es sei denn, dass man die " Glätte " ihres Verlaufs als einen gewissen Vorzug gegenüber der Originalkurve ansehen und diesem " Verlauf eine grössere " Natürlichkeit zuerkennen will als dem beobachteten, wofür jedoch Gründe kaum angebbar sind. Direkt gegen eine solche Annahme srpicht der Umstand, dass die Parabel an den Enden der Beobachtungsstrecke zwischen den Abszissen der Beobachtungspunkte keineswegs so verläuft, wie es das Auge des Beobachters erwartet, das heisst, in erster grober Annäheiung geradlinig. Die Werte der Näherungsparabel 22. Grades für $x = 42$, 40, und -42 liegen vielmehr weit ausserhalb des Verlaufs der empirischen Punkte. Im Bilde sind sie durch eingerahmte Kreuzchen gekennzeichnet.

Alles Wertvolle, was uns die konjunkturmathematische Analyse über den Verlauf der englischen Heiratsziffer von 1870 bis 1913 aus-

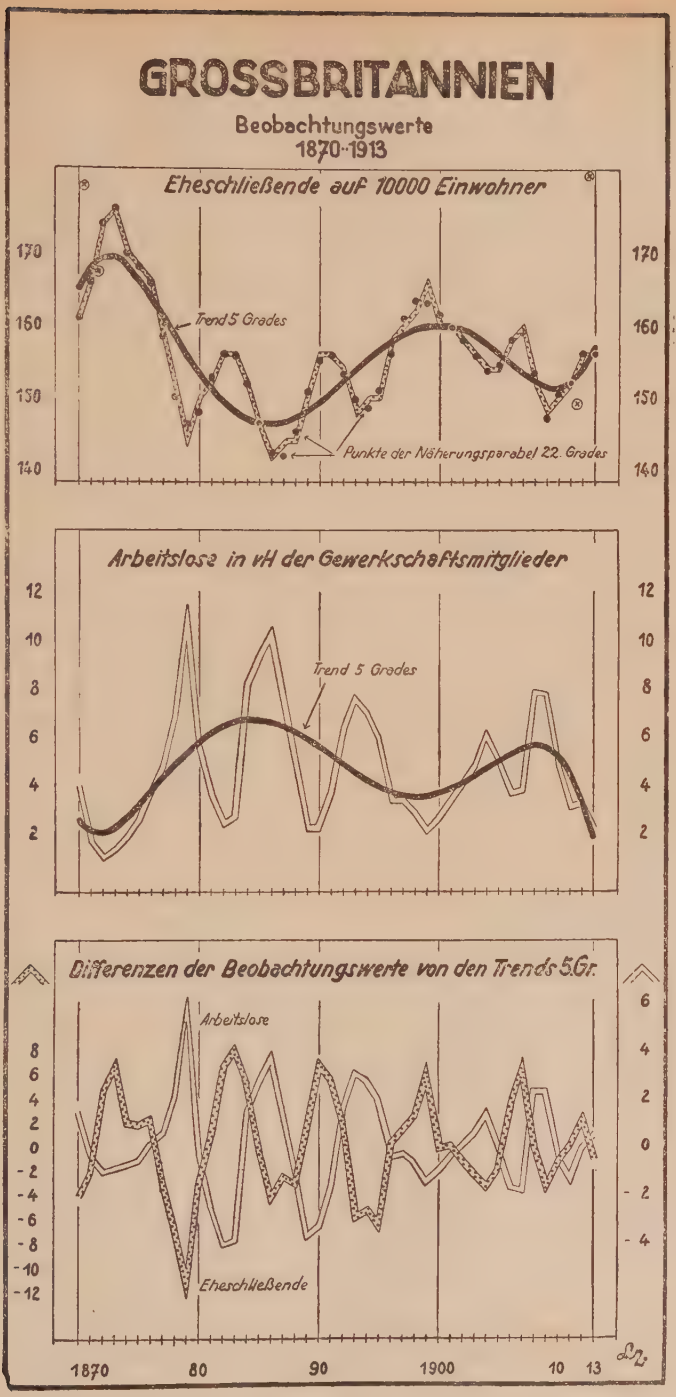

GROSSBRITANNIEN
Beobachtungswerte
1870-1913
Eheschließende auf 10000 Einwohner
170
160
150
140
Trend 5 Grades
Punkte der Näherungsparabel 22. Grades
Arbeitslose in vH der Gewerkschaftsmitglieder
12
10
8
6
4
2
Trend 5 Grades
Differenzen der Beobachtungswerte von den Trends 5 Gr.
Arbeitslose
Eheschließende
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
1870
80
90
1900
10
13

BILD 6.

sagen kann, wird bereits durch die Näherungsparabel fünften Grades ausgesprochen. Eine Erhöhung des Grades der Näherungsparabel vermindert hier, wie oft, ihren Erkenntniswert. Die Kriterien dafür, wann die Rechnung abzubrechen ist, liefert die Methode der Funktionen X_i. Dass diese Methode es ermöglicht, auch gelegentlich eine Näherungsparabel ganz aussergewöhnlich hohen Grades zu berechnen, ist jedoch eine merkenswerte Tatsache, denn bei sehr langen statistischen Reihen kann es und wird es nicht selten erwünscht sein, eine Näherungsparabel vielleicht vom zwölften oder einem noch höheren Grade zu berechnen eine Aufgabe, die ohne Benutzung von Orthogonalfunktionen kaum zu bewältigen ist.

CASSA NAZIONALE MALATTIE PER GLI ADDETTI AL COMMERCIO

Tavole di morbilità e frequenza delle malattie per i prestatori d'opera del commercio (Esperienza 1931)

Introduzione.

In una comunicazione presentata alla Sotto-sezione attuariale della XX^{a} Riunione della Società per il progresso delle scienze (Milano, 12-20 Settembre 1931-IX°) (1), segnalavo come la Cassa Nazionale Malattie per gli Addetti al Commercio, avesse intrapreso la rilevazione dei dati statistici per la costruzione delle tavole di morbilità e per la determinazione dei caratteri di tutti gli altri fenomeni di ordine sociale, demografico e finanziario strettamente connessi con l'esercizio e gli sviluppi dell'assicurazione malattie. Segnalavo altresì che la Cassa avrebbe resi noti, entro cinque anni, i risultati conclusivi delle proprie indagini e delle proprie elaborazioni.

In realtà, il ciclo statistico perfetto non potrà, per ora, essere osservato in quanto, sostanziali modificazioni statutarie in vigore con l'inizio del 1933, non consentiranno di accumunare l'esperienza futura con quella dei primi due anni di esercizio a pieno rischio.

Pertanto, l'estensione della prima indagine statistica italiana su la morbilità dei prestatori d'opera del commercio, dovrà subire forzatamente alcune limitazioni nel tempo e nello spazio e sarà diretta ad accertare l'andamento degli indici statistici ed attuariali significativi per la valutazione e comprensione del rischio, durante il 1931 ed il 1932. Una esperienza siffatta, pur non avendo tutti i requisiti tecnici e scientifici richiesti per assumere carattere definitivo, potrà d'altra parte, per la rigorosità del metodo di osservazione e di elabo-

(1) Cfr. Guido Toja: *Intorno ad una indagine su la morbilità in Italia* in « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari » Anno III°, n° 1, Gennaio 1932-X°.

razione adottato e seguito, sufficientemente far luce su alcuni aspetti del fenomeno malattia considerato collettivamente, e potrà anche contribuire allo studio degli altri e più complessi problemi toccanti gli ulteriori sviluppi della previdenza sociale in Italia.

I risultati delle rilevazioni, invero compendiose, curate ed attuate dalla Cassa saranno raccolti in un volume corredato di tavole statistiche e di grafici che, con ogni certezza, potrà apparire entro l'anno 1933. Tavole e grafici saranno, poi, ampiamente illustrati e commentati in una relazione generale ed in alcune monografie di carattere scientifico e tecnico che mi riprometto, sin d'ora, di presentare al prossimo Congresso internazionale degli attuari.

D'altra parte, anche l'esperienza del 1931, presa a sé stante, ha dato risultati soddisfacenti.

Il Consiglio di Amministrazione dell'Istituto, che conta tra i suoi più autorevoli membri i Presidenti delle Confederazioni Nazionali dei datori di lavoro e dei prestatori d'opera del commercio, aderendo ad analoghe mie proposte, ha ritenuto, quindi, concetto opportuno, anche per soddisfare le numerose sollecitazioni che da più parti sono state mosse alla Cassa, di rendere di pubblica ragione, anticipando così la prima pubblicazione ufficiale, alcuni dei risultati di maggior interesse: essi, se opportunamente interpretati, potranno sin d'ora servire di base, nella loro schematica espressione, per una valutazione e comprensione iniziale della morbilità dei prestatori d'opera del commercio.

***

Le applicazioni dei metodi tecnici, esposti nel corso della « Relazione », vennero eseguite, secondo le mie direttive e sotto la mia personale vigilanza, dal Dr. Carlo Pinghini, Capo dell'Ufficio Statistico-Attuariale Centrale della Cassa. Il Dr. Pinghini ha anche steso, secondo il piano da me prestabilito, il testo della relazione.

Inoltre, poichè la vasta mole delle ricerche e delle elaborazioni, richiese, per contributi di non minore importanza, largo concorso di personale convenientemente addestrato, mi piace di segnalare anche l'opera prestata dal personale tutto dell'Ufficio Statistico-Attuariale della Cassa.

Roma, Gennaio 1933-XI.

Guido Toja

Presidente
Cassa Nazionale Malattie
per gli Addetti al Commercio

RELAZIONE

Considerazioni generali.

1. — Scopo della Cassa Nazionale Malattie per gli Addetti al Commercio (riconosciuta giuridicamente per effetto del R. D. 24 ottobre 1929, n. 1946), è quello di corrispondere ai prestatori d'opera del commercio, per conto dei datori di lavoro, legalmente rappresentati dalla Confederazione Nazionale Fascista del Commercio le seguenti indennità :

a) indennità giornaliera, pari all'ultimo salario o stipendio denunciato per periodi non superiori ai centottanta giorni per ogni malattia ;

b) assistenza medico-farmaceutica sotto forma di sussidio pecuniario, per una durata uguale, al massimo, a quella della indennità principale e nella misura massima, da giustificarsi, di metà della indennità predetta e mai eccedente la somma di lire mille mensili.

Le indennità in parola cominciano a decorrere dal terzo giorno successivo alla data della comunicazione di malattia agli organi della Cassa da parte del prestatore d'opera.

Con il 1° gennaio 1933, è andato in vigore un nuovo Statuto che, tra l'altro, modifica la misura delle prestazioni offerte dalla Cassa nel modo che segue :

a) indennità principale, con un limite massimo di L. 60 giornaliere, limitata a 180 giorni di malattia, consecutivi o complessivi per ogni periodo di 12 mesi : tale periodo decorre dal primo giorno di malattia riconosciuta ;

b) assistenza medico-farmaceutica nella misura massima di un quarto della indennità principale liquidata.

Le indennità predette cominciano a decorrere dal quarto giorno successivo alla data della comunicazione della malattia : esse non sono corrisposte se il prestatore d'opera ammalato non risulti già iscritto alla Cassa per un periodo continuativo di almeno un mese.

L'esperienza attuariale determinata sulle osservazioni che formano oggetto del presente studio, si riferisce all'anno 1931 : essa, quindi, si basa sui principi tecnici regolati dallo Statuto abrogato con l'inizio del 1933.

***

2. — Come è enunciato nella « Introduzione » a questa memoria, la presente indagine si propone di far conoscere alcuni indici significativi per la valutazione e comprensione del fenomeno morbosità, così come risultano dall'esperienza conseguita, durante l'anno 1931 (1° Gennaio-31 Dicembre), attraverso la osservazione e la elaborazione dei dati statistici relativi ai prestatori d'opera del commercio assicurati dalla Cassa Nazionale Malattie per gli Addetti al Commercio.

Le rilevazioni compiute dalla Cassa — che, per quanto riguarda la durata delle malattie, *si riferiscono al numero di giornate di effettiva incapacità lavorativa e non al numero delle giornate ammesse all'indennizzo al netto del periodo di carenza* — considerano il fenomeno morbilità sotto i più differenti aspetti e nelle più svariate manifestazioni: esse sono di carattere demografico e finanziario.

Ci limiteremo in questa prima sommaria indagine all'osservazione della durata e frequenza delle malattie relativamente all'età, al sesso, alle categorie professionali e commerciali della popolazione assicurata, tenendo inoltre conto della influenza della regione su l'andamento del rischio e del peso — su gli indici di morbosità — delle singole malattie dalle quali la popolazione stessa è stata colpita.

La rilevazione dei dati si è basata su l'osservazione unitaria delle modalità qualitative e quantitative che contradistinguono i vari elementi raccolti.

In pratica, le manifestazioni del fenomeno malattia, così come le variazioni intervenute nella composizione della popolazione assicurata, sono state registrate su schede individuali, diversamente selezionate ed elaborate a seconda delle particolari esigenze del momento.

***

3. — I risultati sintetici delle investigazioni compiute dalla Cassa, nel corso dell'anno 1931, sono riassunti nel seguente prospetto.

a) *Maschi*

Numero degli esposti al rischio	145.497
» dei casi di malattia	33.985
» delle giornate di malattia	833.543

b) *Femmine*

Numero degli esposti al rischio	45.567
» dei casi di malattia	9.792
» delle giornate di malattia	302.152

c) *Maschi e Femmine*

Numero degli esposti al rischio	191.064
» dei casi di malattia	43.777
» delle giornate di malattia	1.135.695

NATURA E DETERMINAZIONE DEI COEFFICIENTI DI MORBILITÀ.

1. — Supponiamo di osservare durante un anno o durante più anni una popolazione di assicurati discriminata in gruppi di età uguale, composta rispettivamente di L_x persone di età x, L_{x+1} persone di età $x + 1$, ecc., e il numero totale di giornate di malattia rilevato per ognuno dei gruppi di persone in età x, $x + 1$ ecc., che chiameremo n_x, n_{x+1} ecc.

Operando il quoziente

$$z_x = \frac{n_x}{L_x}$$

chiameremo z_x coefficiente di morbilità, corrispondente all'età x.

Un coefficiente di morbilità così fatto è tale da valere solo nel caso in cui nessuna altra causa, oltre la morte, intervenga a mutare la composizione della popolazione assicurata L_x.

Se, invece, si verificano — come è naturale — fenomeni ordinari di immigrazione ed emigrazione, allora, il denominatore del quoziente

$$\frac{n_x}{L_x}$$

risulterà di natura completamente diversa e sarà rappresentato da una popolazione teorica di assicurati, che indichiamo con E_x, il cui calcolo, di cui ci occuperemo in seguito, presenta particolari caratteri non disgiunti da qualche difficoltà.

La determinazione dei coefficienti di morbilità, i quali, da quanto si è detto in precedenza, rappresentano nell'assicurazione malattie il termine di paragone per la misura del rischio sofferto dall'istituto assicuratore, condotta secondo il sistema da noi indicato, rappresenterebbe, evidentemente, la più semplice e sintetica risoluzione del problema.

In effetti, praticamente, tale semplice risoluzione viene spesso adottata per misurare l'intensità della morbilità durante un anno, benchè la sua applicazione possa presentare, anzi senz'altro presenti particolarità ed elementi inesatti ed attribuisca alla misura del rischio un livello che in alcuni casi si discosta notevolmente dalla intensità effettiva del fenomeno considerato. È naturale quindi che le indagini attuariali più rigorose siano state condotte con metodi analitici e con procedimenti perfetti: metodi e procedimenti dei quali ora ci accingeremo ad esaminare i più significativi.

***

2. — Così il MESSINA (1) è d'opinione che i fenomeni di morbilità, non sapendosi se presentano dispersione normale, non si possono senz'altro ritenere dipendenti da cause costanti, entro convenienti limiti di tempo e di spazio, così come non si possono assumere senza sensibile errore, le frequenze ad essi relative, ancorchè calcolate sopra un numero di osservazioni grandissimo, come valori della rispettiva probabilità.

Il fatto, però, che i coefficienti di morbilità non presentano in pratica, se osservati in condizioni favorevoli di tempo, luogo ed omogeneità, notevoli scostamenti e forti variazioni nel tempo, induce il MESSINA a parlare di « probabilità di malattia » e ad applicare i principi del calcolo delle probabilità ai problemi attuariali concernenti l'assicurazione malattie.

---

(1) MESSINA I.: *I coefficienti di morbilità e l'assicurazione malattie* in « Le Assicurazioni Sociali » Anno IV°, Gennaio-Febbraio 1928, n° 1.

Il coefficiente di morbilità all'età x, quale appare nella risoluzione del problema preso in considerazione dal Messina (1), è espresso da:

$$(1) \qquad z_x = d \int_0^1 \Theta \, \varphi_x(\Theta) \, d\Theta$$

ed è il *valore medio di una variabile casuale continua che rappresenta tutti i possibili valori che puo assumere la durata di malattia di un individuo di età x, durante l'anno di vita x, x + 1.*

Vediamo come si possa arrivare all'espressione del coefficiente di morbilità corrispondente all'età x direttamente in funzione del numero degli esposti al rischio di malattia in età x e delle durate di malattia relative.

Seguendo un metodo non rigoroso supponiamo di osservare gli assicurati durante i successivi anni di vita tra due compleanni che cadono entro il periodo statistico; dovremo perciò tener conto delle frazioni di anno di rischio soltanto per i casi di morte e di eliminazione per altre cause durante il periodo statistico; supponiamo ancora che le registrazioni delle morti o delle eliminazioni per altre cause si facciano in corrispondenza all'età intera in difetto.

Poniamo, per ogni età intera x,

a) : s_x = numero degli esistenti al principio del periodo statistico,
b) : l_x = numero dei nuovi entrati durante il periodo statistico,
c) : d_x = numero dei morti durante il periodo statistico,
d) : w_x = numero degli eliminati per altre cause durante lo stesso periodo,
e) : e_x = numero degli esistenti alla chiusura del periodo statistico

Indichiamo ancora con:

$$\sigma_{x+k}^{(x)} \; , \; \eta_{x+k}^{(x)} \; , \; \varepsilon_{x+k}^{(x)}$$

le somme delle durate di malattia relative agli individui dei gruppi *a*), *b*), *e*), nell'anno di vita $x + k$, $x + k + 1$.

---

(1) Il problema consiste nella determinazione del premio unico che una persona di data età x, deve pagare ad un Istituto perchè questo le assicuri un sussidio giornaliero in caso di malattia. Importa rilevare che nella risoluzione si tien conto del fatto che gli assicurati possono essere eliminati per morte e non per altre cause.

Le durate complessive di malattia osservate durante l'anno di vita x, $x + 1$ per gli individui dei gruppi a), b), e), saranno rispettivamente:

$$(2) \qquad \sigma_x = \sum_{r=a}^{x} \sigma_x^{(r)} \qquad \eta_x = \sum_{r=a}^{x} \eta_x^{(r)} \qquad \varepsilon_x = \sum_{r=a}^{x} \varepsilon_x^{(r)}$$

dove a è l'età intera più bassa osservata.

Il numero E_x degli esposti al rischio di età intera x è dato ovviamente dalla formula ricorrente:

$$(3) \qquad E_x = E_{x-1} - (d_{x-1} + w_{x-1}) + s_x + l_x - e_x \quad (x = a, a+1, \ldots)$$

da cui essendo $E_{a-1} = 0$ si ha:

$$(4) \qquad E_x = \sum_{r=a}^{x} (s_x + l_r + d_r - w_r - e_r) + d_x + w_x .$$

Quindi la durata complessiva λ_x di malattia (in anni) che si riferisce all'anno di vita x, $x + 1$ e agli E_x esposti al rischio è:

$$(5) \qquad \lambda_x = \sum_{r=a}^{x} (\sigma_x^{(r)} + \eta_x^{(r)} - \varepsilon_x^{(r)}) = \sigma_x + \eta_x - \varepsilon_x .$$

Determiniamo, ora, i coefficienti di morbilità z_x, tenendo conto del fatto che le eliminazioni possono essere dovute tanto a decesso quanto ad altre cause.

Si osservi che λ_x risulta la somma della durata di malattia relativa a quelli degli E_x esposti al rischio che durante l'anno di vita x, $x + 1$ non si sono eliminati per causa diversa della morte, e della durata relativa ai w_x individui eliminati durante l'anno di vita x, $x + 1$.

Quest'ultima, ponendo:

$w(u)\,du$ = numero degli eliminati per cause diverse dalla morte in età u, $u + du$ $\qquad (x \leq u \leq x + 1)$

$z(x, u)$ = coefficiente di morbilità per un esposto al rischio tra l'età x ed u, è espressa da:

$$\int_x^{x+1} w(u)\, z(x, u)\, du$$

e quindi:

$$\lambda_x = (E_x - w_x)\, z_x + \int_x^{x+1} w(u)\, z(x, u)\, du \tag{6}$$

in cui a λ_x si può sostituire la sua espressione (5).

La (6) è un'equazione in z_x; ammettendo necessarie ipotesi possiamo da essa ricavare z_x.

Supponendo per esempio:

$$z(x, u) = (u - x)\, z_x$$
$$w(u) = w(x)$$

potremo isolare z_x così

$$\int_x^{x+1} w(u)\, z(x, u)\, du = \frac{1}{2} w(x)\, z_x$$

e

$$z_x = \frac{\lambda_x}{E_x - \frac{1}{2} w_x} \tag{7}$$

***

3. — Ritornando ora alle (3) e (4), ricordiamo che nello stabilirle avevamo considerato, esistenti, eliminati ecc., in età intera supponendo di osservare un gruppo di individui tra due compleanni compresi nel periodo statistico e di registrare le eliminazioni per morte e cause diverse dalla morte in corrispondenza all'età intera in difetto.

A prescindere da queste ipotesi semplificatrici, vediamo ora quali correzioni occorre apportare alle (3), (4) se si tiene conto delle frazioni di anno di rischio. Arriveremo così alle formule statisticamente esatte stabilite da ACKLAND e TOJA (1).

Poniamo ora, indicando con x un'età intera ed essendo $0 \leq \Theta_x < 1$:

a) s_x = numero degli esistenti al principio del periodo statistico in età $x + \Theta_x$

---

(1) ACKLAND: *An investigation of some of the methods for the deducing the rates of mortality, and of withdrawals, etc.*, in « Journal of the Institute of Actuaries ». Oct. 1896 and Jan. 1897. London.

TOJA G.: *Atti della Reale Commissione per la valutazione e i riparti dei disavanzi degli Istituti di Previdenza ferroviari.* Vol. III°. Relazione, Roma, 1919.

b) l_x = numero dei nuovi entrati durante il periodo statistico in età $x + \Theta_x$

c) d_x = numero dei morti durante il periodo statistico in età $x + \Theta_x$

d) w_x = numero degli eliminati per altre cause durante il periodo statistico in età $x + \Theta_x$

e) e_x = numero degli esistenti alla chiusura del periodo statistico in età $x + \Theta_x$

Gli s_x individui del gruppo *a*) che all'inizio delle osservazioni hanno già compiuto l'età x equivalgono, per la frazione di anno trascorsa tra il compleanno e l'inizio delle osservazioni, a $\Sigma_s \Theta_x$ individui rimasti in osservazione per un anno (1).

Analogo significato hanno le notazioni

$$\Sigma_l \Theta_x \ , \ \Sigma_d \Theta_x \ , \ \Sigma_w \Theta_x \ , \ \Sigma_e \Theta_x \ .$$

La (4) diventa, con questa correzioni:

$$(8) \qquad E_x = \sum_{r=a}^{x} (s_r + l_r - d_r - w_r - e_r) + d_x - \\ - \left\{ (\Sigma_s \Theta_x + \Sigma_l \Theta_x - \Sigma_d \Theta_x - \Sigma_w \Theta_x - \Sigma_e \Theta_x) + \Sigma_d \Theta_x \right\}$$

ove si attribuiscano i morti all'età intera in difetto.

In pratica, dovremo porre delle ipotesi che ci permettano di giungere a risultati sufficientemente prossimi a quelli che si dovrebbero ottenere col metodo rigoroso.

Tali ipotesi riguardano il calcolo approssimato dell'età all'entrata e delle frazioni di anno durante le quali sono esposti al rischio gli esistenti e gli eliminati.

Ammessa una uniforme distribuzione degli esistenti, eliminati ecc., quando sia dato un notevole numero di casi in età $x - \frac{1}{2}$, $x + \frac{1}{2}$, possiamo con buona approssimazione attribuirli all'età intera x che indicheremo con (x).

Se per gli esistenti all'inizio e alla chiusura del periodo statistico e per i nuovi entrati durante lo stesso periodo, consideriamo le età

---

(1) Si ammette che, agli effetti della statistica, un individuo di età x rimasto in osservazione durante il periodo statistico per t unità di tempo, equivalga a t individui di età $x, x + 1, \ldots, x + t - 1$ rimasti in osservazione per una unità di tempo.

approssimative (x) sarà, assumendo per i casi di eliminazione (per morte ed altre cause) le età intere in difetto :

$$(9) \qquad E_x = \sum_{r=a}^{x} (s_r + l_r - d_r - w_r - e_r) + \Sigma_d \Theta_x + \Sigma_w \Theta_x$$

Limitiamoci a considerare l'età (x) per gli individui dei gruppi a), b), e), e ammettiamo una uniforme distribuzione dei casi di eliminazione ; avremo :

$$(10) \qquad E_x = \sum_{r=a}^{x} (s_r + l_r - d_r - w_r - e_r) + \frac{1}{2}(d_x + w_x)$$

***

4. — La (10) si avvicina all'espressione citata da RICHARD (1) per gli esposti al rischio di età intera x

$$(10') \qquad E_x = s_x + \frac{l_x - (d_x + w_x)}{2}$$

per un periodo statistico unitario salvo il fatto che il RICHARD considera anche i nuovi entrati come restanti in rischio per sei mesi.

Richard chiama, poi, coefficiente di morbilità (annuale), corrispondente all'età x, il quoziente

$$(11) \qquad z_x = \frac{n_x}{E_x}$$

dove, come è noto, E_x è il numero degli esposti al rischio di età x, ed n_x il numero totale di giornate di malattia degli E_x esposti al rischio, durante il periodo statistico (un anno).

***

5. — La definizione di coefficiente di morbilità adottata da WATSON (2) differisce dalla precedente per il fatto che in Inghilterra i soccorsi in caso di malattia non sono giornalieri, ma settimanali

---

(1) RICHARD P. I. et PETIT E. : *Théorie mathématique des assurances*. Vol. II, G. Doin, Parigi, 1922.

(2) WATSON A. W. : *Sickness and mortality experience of the I. O. O. F. Manchester Unity during five years 1893, 1897* publ. by the « Grand Master and Board of Directors of the I. O. O. F., M. U. », Manchester, 1903.

e perciò il numeratore della (10) rappresenta il numero di settimane di malattia degli E_x esposti al rischio.

Per il calcolo della funzione E_x, WATSON suppone :

1) che i nuovi assunti, in ogni anno entrino in rischio al 1° luglio dell'anno stesso.

2) che i morti durante l'anno rimangano in rischio fino al 30 giugno.

3) che gli eliminati durante l'anno per altre cause rimangano in rischio fino al 30 giugno.

In base a queste ipotesi, servendoci delle notazioni precedenti per un periodo statistico di un anno avremo ancora la (10').

***

6. — Il calcolo dei coefficienti di morbilità, come abbiamo visto attraverso le brevi considerazioni metodologiche esposte in precedenza, può assumere in taluni casi carattere particolarmente rigoroso. In effetti, la elaborazione delle basi tecniche per la costruzione di una esperienza poliennale, richiede l'applicazione di alcune leggi, in difetto delle quali i risultati definitivi non potrebbero essere assunti, per ogni ulteriore sviluppo, con sufficiente tranquillità.

Conseguentemente, preoccupati di predisporre il materiale statistico grezzo nel modo migliore, abbiamo provveduto, dal canto nostro, alla determinazione di alcune leggi che, assunte a base delle successive elaborazioni, daranno alle esperienze future, impostate e costruite dalla Cassa, carattere sufficientemente rigoroso ed attendibile.

Allo stato attuale, però, in cui le rilevazioni compiute dalla Cassa si limitano alla raccolta degli elementi statistici relativi ad un solo anno (precisamente il 1931), non ci è sembrato indispensabile costruire i coefficienti di morbilità secondo formule rigorose, l'applicazione delle quali, rimandiamo senz'altro alla elaborazione dei dati statistici relativi alla prima esperienza che la Cassa renderà nota al più presto e che come già è stato ripetutamente accennato — sarà diretta a determinare l'andamento e l'intensità del fenomeno malattia, nei due primi anni di esercizio dell'assicurazione a pieno rischio.

Nel caso particolare, quindi, il coefficiente di morbilità da noi adottato :

$$z_x = \frac{n_x}{E_x}$$

dipende dall'aver considerato n_x uguale al numero complessivo, per ogni gruppo di individui in età intera x, delle giornate di malattia rilevate tra il 1° Gennaio ed il 31 Dicembre 1931. Il numero degli esposti al rischio (E_x) è stato calcolato tenendo conto delle giornate effettive di rischio di ogni individuo in età intera x, mediante la formula :

$$E_x = s_x + \frac{\sum_{1}^{365} g\,(l_x - d_x)}{365} \tag{12}$$

In questa formula, la cui notazione ha carattere approssimativo, poniamo :

s_x = esistenti al principio del periodo statistico (1° Gennaio 1931) in età intera x ;

l_x = nuovi entrati durante il periodo statistico (1° Gennaio - 31 Dicembre 1931) in età intera x ;

d_x = eliminati per morte ed altre cause durante il periodo statistico, parimenti in età intera x ;

g = numero delle giornate, per ogni individuo in età intera x, intercorrenti tra la data di iscrizione — per i nuovi entrati — la data di cancellazione — per gli eliminati — e la fine del periodo statistico (31 dicembre 1931).

***

7. — Le tavole di morbilità da noi calcolate, tengono conto anche della *frequenza delle malattie* che indichiamo con :

$$f_x = \frac{c_x}{E_x} \tag{13}$$

dove c_x corrisponde al numero, per ogni età intera x, dei casi di malattia rilevati tra il 1° Gennaio ed il 31 Dicembre 1931, e della *durata media* di ogni caso di malattia che indichiamo con :

$$\delta_x = \frac{n_x}{c_x} \tag{14}$$

SCISSIONE DELLE CLASSI QUINQUENNALI DI ESPOSTI AL RISCHIO, DEI CASI E DELLE GIORNATE DI MALATTIA IN CLASSI ANNUALI.

1. — L'esperienza del 1931 — come abbiamo visto in precedenza — ha tratto le sue basi, per ragioni contingenti, dalla osservazione degli elementi statistici necessari per le costruzioni delle

tavole di morbilità e frequenza delle malattie, raggruppati in classi quinquennali.

Avremmo potuto, in questa prima indagine su la morbilità dei prestatori d'opera del commercio accontentarci di calcolare i coefficienti di morbilità per classi quinquennali, rimandando la costruzione di una completa tavola di morbilità, per singole classi (da 15 a 64 anni), ad un periodo più lontano : avremmo cioè potuto attendere che la rilevazione tuttora in atto dei dati statistici che la Cassa ricava da uno speciale schedario così detto « attuariale », fosse completamente definita in ogni sua parte.

Il Prof. Toja, nel tracciare, nella introduzione a questa memoria, il programma assunto e seguìto dalla Cassa nella elaborazione della prima indagine italiana sulla morbilità dei prestatori d'opera del Commercio, ha espresse, motivandole, le ragioni che hanno consigliato la Cassa di rendere di pubblica ragione, ancor prima della chiusura del ciclo statistico perfetto, alcuni risultati delle proprie rilevazioni ed elaborazioni.

La stessa impazienza dalla quale siamo stati presi sin dall'inizio delle operazioni statistiche, ci ha condotto su di una via che potrà, forse, apparire ardita.

Le difficoltà insite nella costruzione delle tavole di morbilità sono a tutti ben note ; animati però dal desiderio di rendere di pubblica ragione i risultati delle nostre osservazioni al più presto, abbiamo ritenuto concetto opportuno di esporre alcuni di essi, sotto una forma alla quale abbiamo inteso di dare un carattere di completezza e di perfezione.

A ciò siamo stati anche indotti da diverse constatazioni potute fare durante il corso delle nostre indagini che, in alcuni casi, hanno rivestito un carattere di particolare laboriosità. Prima di tutto, i risultati grezzi delle nostre osservazioni, salvo beninteso le inevitabili discrepanze che è dato di notare in ogni indagine collettiva, anche in quelle estese a grandi masse di individui e a notevole numero di osservazioni, ci sono apparsi abbastanza regolari. Secondariamente, confrontando questi risultati, che il più delle volte abbiamo discriminato in vario modo per poter cogliere l'intensità e l'andamento delle loro componenti, con i risultati analoghi ottenuti per le stesse categorie di individui da altre istituzioni di previdenza italiane e straniere, abbiamo potuto constatare che l'intensità e l'andamento da noi rilevati non si discostavano dall'intensità e dall'andamento presi a base del confronto, anzi vi aderivano sufficientemente.

***

2. — Alla stregua, pertanto, di queste considerazioni, abbiamo provveduto a calcolare i coefficienti di morbilità e la frequenza delle malattie per singole classi annuali, con riferimento alla esperienza complessiva estesa a tutto il Regno, tenendo esclusivamente conto del sesso della popolazione assicurata. Le tavole di morbilità e frequenza delle malattie per professioni, categorie commerciali e regioni tengono conto al contrario, — poichè la esiguità di talune classi non permetteva di trarre attendibili e complete illazioni — dei soli coefficienti quinquennali, che sono stati opportunamente perequati.

***

3. — Adottata la (11), per la determinazione del coefficiente di morbilità corrispondente all'età x, possiamo:

1) *determinare le classi annuali di esposti al rischio e di casi e giornate di malattia e calcolare i corrispondenti coefficienti di morbilità secondo la* (11), *per* $x = 15, 16, \ldots, 64$, *perequando le classi annuali grezze di esposti al rishio e di casi e giornate, o, indifferentemente, i coefficienti grezzi di morbilità;*

oppure:

2) *calcolare i coefficienti in corrispondenza ad età in generale equidistanti e interpolare tra questi i coefficienti corrispondenti alle età intermedie.*

La determinazione dei coefficienti fondamentali si può fare:

a) mediante classi poliennali che comprendano le età a cui i quozienti fondamentali si riferiscono,

oppure

b) mediante classi annuali corrispondenti alle età a cui quei quozienti si riferiscono.

Poichè quest'ultimo procedimento comporta una interpolazione di classi poliennali, apparirebbe preferibile, considerato secondo *a*) un generico intervallo di età $\bar{x} \vdash \bar{x} + 5$ e indicate con $\bar{S}_E$ ed $\bar{S}_n$ le classi corrispondenti di esposti al rischio e di giornate di malattia, costruire il coefficiente:

$$Z_{\bar{x}+2} = \frac{\bar{S}_n}{\bar{S}_E}$$

attribuendolo, per es., all'anno centrale dell'intervallo. Indicando con $E_{\bar{x}}$, $E_{\bar{x}+1}$, ..., $E_{\bar{x}+4}$ gli esposti al rischio nel primo, secondo, ..., quinto anno dell'intervallo, e con $n_{\bar{x}}$, $n_{\bar{x}+1}$, ..., $n_{\bar{x}+4}$ le corrispondenti classi annuali di giornate di malattia sarà:

$$Z_{\bar{x}+2} = \frac{n_{\bar{x}} + n_{\bar{x}+1} + n_{\bar{x}+2} + n_{\bar{x}+3} + n_{\bar{x}+4}}{E_{\bar{x}} + E_{\bar{x}+1} + E_{\bar{x}+2} + E_{\bar{x}+3} + E_{\bar{x}+4}} =$$

$$= \frac{E_{\bar{x}} \cdot z_{\bar{x}} + E_{\bar{x}+1} \cdot z_{\bar{x}+1} + E_{\bar{x}+2} \cdot z_{\bar{x}+2} + E_{\bar{x}+3} \cdot z_{\bar{x}+3} + E_{\bar{x}+4} \cdot z_{\bar{x}+4}}{E_{\bar{x}} + E_{\bar{x}+1} + E_{\bar{x}+2} + E_{\bar{x}+3} + E_{\bar{x}+4}}$$

Tale uguaglianza non può sussistere che per z_x costante nel quinquennio $\bar{x} \vdash \bar{x} + 5$, il che è escluso, oppure per

$$E_{\bar{x}} = E_{\bar{x}+1} = E_{\bar{x}+3} = E_{\bar{x}+4}$$

il che non può, in generale, verificarsi.

Abbiamo preferito, quindi, effettuare la scissione delle classi quinquennali di esposti al rischio e di casi e giornate di malattia in classi annuali con un procedimento interpolatorio, che ora esporremo, atto a fornire nello stesso tempo classi sufficientemente perequate, calcolando successivamente i corrispondenti coefficienti di morbilità secondo la (11).

***

4. — Il metodo di interpolazione da noi adottato (1) consiste in due successive interpolazioni paraboliche, la prima delle quali ci fornisce l'andamento generale della curva, mentre la seconda elimina ogni brusco cambiamento di direzione nella curva stessa.

Analiticamente, poste ovvie ipotesi di regolarità della curva, dovremo, con l'applicazione successiva delle due interpolazioni paraboliche, arrivare a determinare univocamente una funzione $y = F(x)$, finita e continua insieme con la sua derivata prima, atta a conservare l'ammontare delle singole classi quinquennali: cioè tale, che se $S_{\bar{x}}$ è l'ammontare (dato) della classe quinquennale generica $(\bar{x} \vdash \bar{x} + 5)$, sia

$$\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+5} F(x)\, dx = S_{\bar{x}}.$$

(1) Cfr.: C. GINI e L. GALVANI: *Tavole di mortalità della popolazione italiana* » in « Annali di Statistica. Serie VI^a, vol. VIII°. Istituto poligrafico per l'amministrazione dello Stato, Roma, 1932-X°.

Allora la classe annuale $(\bar{x} \vdash \bar{x} + 1)$ sarà data da

$$s_{\bar{x}} = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+1} F(x)\, d\, x\ .$$

Dobbiamo dunque:

a) condurre, per ogni terna di classi quinquennali consecutive, un arco di parabola che conservi l'ammontare delle singole classi quinquennali e calcolarne le ordinate e le derivate corrispondenti agli estremi dei quinquenni;

b) condurre, per ogni singolo quinquennio, un arco di parabola che conservi l'ammontare della rispettiva classe quinquennale ed abbia come ordinata e come derivata in ognuno degli estremi del quinquennio la media aritmetica delle ordinate e delle derivate corrispondenti a due archi di parabola condotti sui quindicenni che hanno come mediani i quinquenni adiacenti all'estremo stesso.

***

5. — Nella fase *a*) del procedimento, assumendo come unità di misura sull'asse dei tempi il semi-quinquennio e come origine, per il momento, l'inizio di un quinquennio

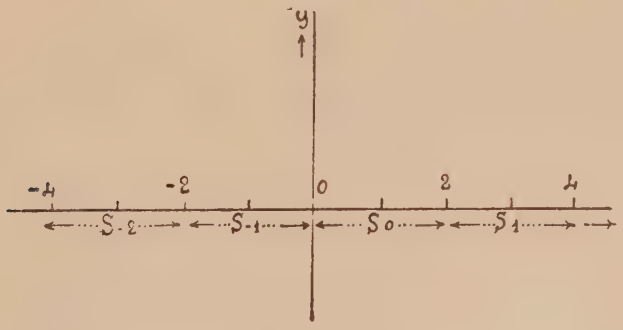


Fig. 1.

costruiamo:

una funzione $\qquad y = f_1(x) = g_1(x\,;\, a_1,\, b_1,\, c_1, \ldots)$

tale che

$$\int_{-2}^{0} f_1(x)\, dx = S_{-1}$$

$$\int_0^2 f_1(x)\,dx = S_0$$

$$\int_2^4 f_1(x)\,dx = S_1$$

e una funzione $y = f_2(x) = g_2(x;\ a_2,\ b_2,\ c_2, \ldots)$

tale che

$$\int_{-4}^{-2} f_2(x)\,dx = S_{-2}$$

$$\int_{-2}^{0} f_2(x)\,dx = S_{-1}$$

$$\int_0^2 f_2(x)\,dx = S_0$$

Poichè la $f_1(x)$ e la $f_2(x)$ devono soddisfare a tre condizioni, entrambe conterranno tre parametri. Supponendo allora senz'altro che $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ siano polinomi in x, di 2^0 grado, avremo:

$$f_1(x) = a_1 + 2b_1 x + 3c_1 x^2$$

$$\left(\frac{d}{dx} f_1(x) = 2b_1 + 6c_1 x\right)$$

$$f_2(x) = a_2 + 2b_2 x + 3c_2 x^2$$

$$\left(\frac{d}{dx} f_2(x) = 2b_2 + 6c_2 x\right)$$

con le condizioni:

$$[a_1 x + b_1 x^2 + c_1 x^3]_{-2}^{0} = S_{-1} \qquad [a_2 x + b_2 x^2 + c_2 x^3]_{-4}^{-2} = S_{-2}$$

$$[a_1 x + b_1 x^2 + c_1 x^3]_{0}^{2} = S_0 \qquad [a_2 x + b_2 x^2 + c_2 x^3]_{-2}^{0} = S_{-1}$$

$$[a_1 x + b_1 x^2 + c_1 x^3]_{2}^{4} = S_1 \qquad [a_2 x + b_2 x^2 + c_2 x^3]_{0}^{2} = S_0$$

I sistemi che determinano i parametri di $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ sono rispettivamente:

$$(1)\quad \begin{cases} 2a_1 - 4b_1 + 8c_1 = S_{-1} \\ 2a_1 + 4b_1 + 8c_1 = S_0 \\ 2a_1 + 12b_1 + 56c_1 = S_1 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} 2a_2 - 12b_2 + 56c_2 = S_{-2} \\ 2a_2 - 4b_2 + 8c_2 = S_{-1} \\ 2a_2 + 4b_2 + 8c_2 = S_0 \end{cases}$$

Senza risolvere i sistemi (1) e (2), possiamo subito calcolare le ordinate e le derivate corrispondenti alle due parabole nell'estremo 0. Esse sono:

$$f_1(0) = \frac{2S_{-1} + 5S_0 - S_1}{12} \qquad \left[\frac{d}{dx} f_1(x)\right]_{x=0} = \frac{S_0 - S_{-1}}{4}$$

$$f_2(0) = \frac{2S_0 + 5S_{-1} - S_{-2}}{12} \qquad \left[\frac{d}{dx} f_2(x)\right]_{x=0} = \frac{S_0 - S_{-1}}{4}$$

e le medie aritmetiche di tali ordinate e derivate sono

$$\frac{f_1(0) + f_2(0)}{2} = \frac{-S_{-2} + 7S_{-1} + 7S_0 - S_1}{24}$$

$$\frac{\left[\frac{d}{dx} f_1(x)\right]_{x=0} + \left[\frac{d}{dx} f_2(x)\right]_{x=0}}{2} = \frac{-6S_{-1} + 6S_0}{24}$$

Analogamente, per l'altro estremo del quinquennio (0,2) abbiamo

$$\frac{f_1(2) + f_2(2)}{2} = \frac{-S_{-1} + 7S_0 + 7S_1 - S_2}{24}$$

$$\frac{\left[\frac{d}{dx} f_1(x)\right]_{x=2} + \left[\frac{d}{dx} f_2(x)\right]_{x=2}}{2} = \frac{-6S_0 + 6S_1}{24}$$

Nella fase *b*) del procedimento consideriamo il quinquennio (0,2) a cui corrisponde la classe di ammontare S_0, assumendo come origine il centro di esso. Tenendo conto dei risultati ottenuti in precedenza e del cambiamento di origine, costruiamo la funzione

$$y = F(x) = G(x\,;\, a_0\,,\, a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots)$$

tale che:

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = S_0$$

$$F(-1) = \frac{-S_{-2} + 7S_{-1} + 7S_0 - S_1}{24}$$

$$F(1) = \frac{-S_{-1} + 7S_0 + 7S_1 - S_2}{24}$$

$$\left[\frac{d}{dx} F(x)\right]_{x=-1} = \frac{6S_{-1} + 6S_0}{24}$$

$$\left[\frac{d}{dx} F(x)\right]_{x=1} = \frac{-6S_0 + 6S_1}{24}$$

Dovendo soddisfare a queste cinque condizioni la $F(x)$ dipenderà da cinque parametri.

Supponendo che la $F(x)$ sia un polinomio in x, di 4° grado

$$24F(x) = a_0 + 2a_1 x + 3a_2 x^2 + 4a_3 x^3 + 5a_4 x^4$$

$$(24F'(x) = 2a_1 + 6a_2 x + 12a_3 x^2 + 20a_4 x^3)$$

si avrà per la determinazione dei parametri di $F(x)$ il sistema lineare di 5 equazioni in 5 incognite:

$$\begin{cases} a_0 - 2a_1 + 3a_2 - 4a_3 + 5a_4 = -S_{-2} + 7S_{-1} + 7S_0 - S_1 \\ a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 = -S_{-1} + 7S_0 + 7S_1 - S_2 \\ 2a_1 - 6a_2 + 12a_3 + 20a_4 = -6S_{-1} + 6S_0 \\ 2a_1 + 6a_2 + 12a_3 + 20a_4 = -6S_0 + 6S_1 \\ 2a_0 + 2a_2 + 2a_4 = 24S_0 \end{cases}$$

che risoluto dà:

$$a_0 = \frac{1}{16}(7S_{-2} - 36S_{-1} + 250S_0 - 36S_1 + 7S_2)$$

$$a_1 = \frac{1}{16}(6S_{-2} - 36S_{-1} + 36S_1 - 6S_2)$$

$$a_2 = \frac{1}{16}(-10S_{-2} + 48S_{-1} - 76S_0 + 48S_1 - 10S_2)$$

$$a_3 = \frac{1}{16}(-S_{-2} + 2S_{-1} - 2S_1 + S_2)$$

$$a_4 = \frac{1}{16}(3S_{-2} - 12S_{-1} + 18S_0 - 12S_1 + 3S_2)$$

I coefficienti della funzione interpolatrice nell'interno di ciascun quinquennio, sono così determinati; si tratta ora di effettuare la scissione della classe quinquennale S_0 assegnata nelle classi annuali $s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2$

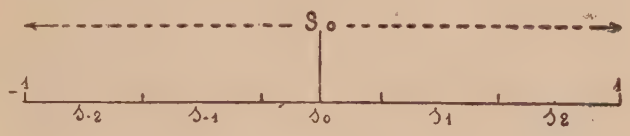


FIG. 2.

Sarà come già si è visto:

$$s_{-2} = \int_{-1}^{-\frac{3}{5}} F(x)\,dx\,,\ s_{-1} = \int_{-\frac{3}{5}}^{-\frac{1}{5}} F(x)\,dx\,,\ S_0 =$$

$$= \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} F(x)\,dx\,,\ s_1 = \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{3}{5}} F(x)\,dx\,,\ s_2 = \int_{\frac{3}{5}}^{1} F(x)\,dx$$

e in generale:

$$s_{\bar{x}} = \int_{\frac{2\bar{x}-1}{5}}^{\frac{2\bar{x}+1}{5}} F(x)\,dx$$

$s_{\bar{x}}$ si può sviluppare come polinomio di 4° grado in $\bar{x}$

$$s_{\bar{x}} = A_0 + A_1\bar{x} + A_2\bar{x}^2 + A_3\bar{x}^3 + A_4\bar{x}^4$$

i cui coefficienti, eseguendo i calcoli, sono così espressi in funzione delle S_i:

$$A_0 = \frac{1}{75.000}\{\ 516\,S_{-2} - 2.664\,S_{-1} + 19.296\,S_0 - 2.664\,S_1 + 516\,S_2\}$$

$$A_1 = \frac{1}{75.000}\{\ 370\,S_{-2} - 2.240\,S_{-1} + 2.240\,S_1 - 370\,S_2\}$$

$$A_2 = \frac{1}{75.000}\{-360\,S_{-2} + 1.740\,S_{-1} - 2.760\,S_0 + 1.740\,S_1 - 360\,S_2\}$$

$$A_3 = \frac{1}{75.000}\{-\ 20\,S_{-2} + \ 40\,S_{-1} - \ 40\,S_1 + \ 20\,S_2\}$$

$$A_4 = \frac{1}{75.000}\{\ 30\,S_{-2} - 120\,S_{-1} + 180\,S_0 - 120\,S_1 + \ 30\,S_2\}$$

In definitiva le classi annuali del quinquennio $x \vdash x + 5$ saranno espresse da :

$$s_x = -0{,}013.653.33\, S_{x-10} + 0{,}087.146.67\, S_{x-5} + 0{,}148.480.00\, S_x - \\ - 0{,}023.786.67\, S_{x+5} + 0{,}001.813.33\, S_{x+10}$$

$$s_{x+1} = -0{,}002.186.67\, S_{x-10} + 0{,}015.413.33\, S_{x-5} + 0{,}222.880.00\, S_x - \\ - 0{,}043.253.33\, S_{x+5} + 0{,}007.146.67\, S_{x+10}$$

$$s_{x+2} = 0{,}006.880.00\, S_{x-10} - 0{,}035.520.00\, S_{x-5} + 0{,}257.280.00\, S_x - \\ - 0{,}035.520.00\, S_{x+5} + 0{,}006.880.00\, S_{x+10}$$

$$s_{x+3} = 0{,}007.146.67\, S_{x-10} + 0{,}043.253.33\, S_{x-5} + 0{,}222.880.00\, S_x + \\ + 0{,}015.413.33\, S_{x+5} - 0{,}002.186.67\, S_{x+10}$$

$$s_{x+4} = 0{,}001.813.33\, S_{x-10} - 0{,}023.786.67\, S_{x-5} + 0{,}148.480.00\, S_x + \\ + 0{,}087.146.67\, S_{x+5} - 0{,}013.653.33\, S_{x+10}$$

Il procedimento che abbiamo illustrato ci fornisce l'ammontare di ogni singola classe annuale espresso in funzione dell'ammontare della classe quinquennale corrispondente e dell'ammontare delle classi quinquennali relative ai due quinquenni adiacenti al quinquennio, cosicchè dalle classi quinquennali da 15 a 60 anni si potrebbero dedurre quelle annuali da 25 a 50 anni.

Allo scopo di scindere anche le classi quinquennali $(15 \vdash 20)$, $(20 \vdash 25)$, $(55 \vdash 60)$, $(60 \vdash 65)$ in classi annuali, si conviene che la parabola del 2° ordine che conserva le classi quinquennali $(15 \vdash 20)$, $(20 \vdash 25)$, $(25 \vdash 30)$ sia quella stessa che conserva le classi quinquennali $(10 \vdash 15)$, $(15 \vdash 20)$, $(20 \vdash 25)$; che la parabola del 2° ordine che conserva le classi $(10 \vdash 15)$, $(15 \vdash 20)$, $(20 \vdash 25)$ sia quella stessa che conserva le classi $(5 \vdash 10)$, $(10 \vdash 15)$, $(15 \vdash 20)$; che la parabola del 2° ordine che conserva le classi $(55 \vdash 60)$, $(60 \vdash 65)$, $(65 \vdash 70)$, sia la stessa che conserva le classi $(60 \vdash 65)$, $(65 \vdash 70)$, $(70 \vdash 75)$; che la parabola del 2° ordine che conserva le classi $(60 \vdash 65)$; $(65 \vdash 70)$, $(70 \vdash 75)$, sia quella stessa che conserva le classi $(65 \vdash 70)$, $(70 \vdash 75)$, $(75 \vdash 80)$.

Per poi facilitare i calcoli, si ricorre all'artificio di calcolare in corrispondenza alle classi $(5 \vdash 10)$, $(10 \vdash 15)$, $(65 \vdash 70)$, $(70 \vdash 75)$ dei valori fittizi

$$S_5, S_{10}, S_{65}, S_{70}$$

tali che, servendosene nel calcolo come ci si serve delle classi quinquennali conosciute, si pervenga agli stessi risultati a cui si arriverebbe tenendo conto della convenzione di cui sopra.

I valori di queste classi fittizie sono:

$$S_{10} = \int_{-4}^{-2} f_1(x) = 3\,(S_{15} - S_{20}) + S_{25}$$

e analogamente

$$S_5 = 3\,(S_{10} - S_{15}) + S_{20}$$
$$S_{65} = S_{50} - 3\,(S_{55} - S_{60})$$
$$S_{70} = S_{55} - 3\,(S_{60} - S_{65})$$

***

6. — Allo scopo di semplificare il calcolo meccanico, abbiamo proceduto alla interpolazione dei dati mediante appositi prospetti, recanti nella prima colonna i valori delle classi quinquennali di esposti al rischio, casi o giornate di malattia (delle quali abbiamo solo costruito quelle corrispondenti agli intervalli di età 5 |– 10, 10 |– 15, 65 |– 70, 70 |– 75, poichè le altre erano conosciute) e nelle colonne successive i prodotti di tali classi per i coefficienti fissi che figurano nella (3).

La simmetria delle formule che danno la coppia s_x, s_{x+4} e di quelle che danno la coppia s_{x+1}, s_{x+3}, ci permette di servirci di un solo prospetto per il calcolo di ciascuna di queste coppie di classi annuali, eseguendo la somma degli elementi del prospetto, una volta secondo la diagonale che scende verso destra e un'altra volta secondo la diagonale che scende verso sinistra. Un altro prospetto serve per il calcolo delle classi annuali centrali dei quinquenni.

A scopo di esemplificazione, esponiamo, nei prospetti 1, 2, 3, il calcolo per la scissione in classi annuali delle classi quinquennali di esposti al rischio — femmine.

Si è provveduto nello stesso modo per il calcolo delle classi annuali di esposti al rischio — maschi — e di casi e giornate di malattia — maschi e femmine.

Il prospetto 1 contiene il calcolo delle classi annuali del tipo s_x ed s_{x+4} corrispondenti alla prima e all'ultima delle (3); il prospetto 2 si riferisce al calcolo delle classi annuali del tipo s_{x+1}, s_{x+3} secondo la seconda e la penultima delle (3), ed infine il prospetto 3 serve al calcolo delle classi del tipo s_{x+2} mediante la terza delle (3).

Calcolo delle classi annuali del tipo s_x , s_{x+4} .

x	S_x	0,013.653.33 S_x	0,087.146.67 S_x	0,148.480.00 S_x	0,023.786.67 S_x	0,001.813.33 S_x	x	s_x	$x+4$	s_{x+4}
5	— 10.214	—139,455.11	—	—	—	— 18,521.25	—	—	—	—
10	1.381	18,855.25	120,349.55	—	32,849,39	2,504.21	—	—	—	—
15	8.388	114,524.13	730,986.27	1.245,450.24	199,522.59	15,210.21	15	1.263,855.90	19	2.077,936.10
20	10.807	147,551,54	941,794.06	1.604,623.36	257,062.54	19,596.66	20	2.122,301.11	24	2.077,433.93
25	8.638	117,937.46	752,772.93	1.282,570.25	205,469.25	15,663.54	25	1.973,330.24	29	1.510,018.32
30	6.075	82,943.98	529,416.02	902,016.00	144,504.02	11,015.98	30	1.408,392.56	34	1.055,517.84
35	4.403	60,115.61	383,706.79	653,757.44	104,732.71	7,984.09	35	991,386.17	39	782,391.43
40	3.247	44,332.36	282,965.24	482,114.56	77,235.32	5,887.88	40	740,578.38	44	535,208.18
45	1.867	25,490.77	162,702.83	277,212.16	44,409.71	3,385.49	45	473,489.31	49	301,002.85
50	1.164	15,892.48	101,438.72	172,830.72	27,687.68	2,110.72	50	277,230.63	54	182,947.93
55	615	8,396.80	53,595.20	91,315.20	14,628.80	1,115.20	55	159,368.43	59	93,076.69
60	363	4,956.16	31,634.24	53,898.24	8,634.56	658.24	60	82,766.40	64	70,382.40
65	408	5,570.56	35,555.84	—	9,704.96	739.84	—	—	—	—
70	480	6,553.60	—	—	—	870.40	—	—	—	—

Calcolo delle classi annuali del tipo S_{x+1}, S_{x+3}.

x	S_x	0,002.186.67 S_x	0,015.413.33 S_x	0,222.880.00 S_x	0,043.253.33 S_x	0,007.146.67 S_x	$x+1$	s_{x+1}	$x+3$	s_{x+3}
5	— *10.214*	— *22,334.65*	—	—	—	— *72,996.09*	—	—	—	—
10	*1.381*	*3,019.79*	*21,285.81*	—	*59,732.85*	*9,869.55*	—	—	—	—
15	8.388	18,341.79	129,287.01	1.869,517.44	362,808.93	59,946.27	16	1.507,432.09	18	1.884,471.91
20	10.807	23,631.34	166,571.86	2.408,664.16	467,438.74	77,234.06	21	2.204,725.14	23	2,175.581.10
25	8.638	18,888.45	133,140.34	1.925,237.44	373,622,26	61,732.93	26	1.842,170.32	28	1,601.753.04
30	6.075	13,284.02	93,635.98	1.353,996.00	262,763.98	43,416.02	31	1.296,265.83	33	1.118,372.57
35	4.403	9,627.91	67.864.89	981,340.64	190,444.41	31.466.79	36	928,987.44	38	826,274.16
40	3.247	7,100.12	50,047.08	723,691.36	140,443.56	23,205.24	41	705,836.98	43	602,894.38
45	1.867	4,082.51	28,776.69	416,116,96	80,753.97	13,342.83	46	410,584.45	48	323,736.51
50	1.164	2,545.28	17,941.12	259.432.32	50,346.88	8,318.72	51	257,102.33	53	210,569.03
55	615	1,344.80	9,479.20	137,071.20	26,600.80	4,395.20	56	138,144.69	58	104,770.03
60	363	793.76	5,595.04	80,905.44	15,700.96	2,594.24	61	73,622.40	63	67,862.40
65	408	892.16	6,288.64	—	17,647.36	2,915.84	—	—	—	—
70	480	1,049.60	—	—	—	3,430.40	—	—	—	—

PROSPETTO N. 3.

Calcolo delle classi annuali del tipo s_{x+2}.

x	S_x	0,006.880.00 S_x	0,035.520.00 S_x	0,257.280.00 S_x	0,035.520.00 S_x	0,006.880.00 S_x	$x+2$	s_{x+2}
5	—10.214	—70,272.32	—	—	—	—	—	—
10	1.381	9,501.28	49,053.12	—	—	—	—	—
15	8.388	57,709.44	297,941.76	2.158,064.64	—	—	17	1.714,304.00
20	10.807	74,352.16	383,864.64	2.780,424.96	383,864.64	—	22	2.226,958.72
25	8.638	59,429.44	306,821.76	2.222,384.64	306,821.76	59,429.44	27	1.710,738.08
30	6.075	41,796.00	215,784.00	1.562,976.00	215,784.00	41,796.00	32	1.196,451.20
35	4.403	30,292.64	156,394.56	1.132,803.84	156,394.56	30,292.64	37	873,960.80
40	3.247	22,339.36	115,333.44	835,388.16	115,333.44	22,339.36	42	662,482.08
45	1.867	12,844.96	66,315.84	480,341.76	66,315.84	12,844.96	47	358,186.88
50	1.164	8,008.32	41,345.28	299,473.92	41,345.28	8,008.32	52	236,150.08
55	615	—	21,844.80	158,227.20	21,844.80	4,231.20	57	119,640.16
60	363	—	—	93,392.64	12,893.76	2,497.44	62	68,366.40
65	408	—	—	—	14,492.16	2,807.04	—	—
70	480	—	—	—	—	3,302.40	—	—

In tal modo i tre prospetti, complessivamente, ci danno tutte le classi annuali da 15 a 64 anni.

Per es. la s_{26}, secondo la seconda delle (3), è data da:

$$s_{26} = -18{,}341.79 + 166{,}571.86 + 1.925{,}237.44 - 262{,}763.98 + \\ + 31{,}466.79 = 1.842{,}170.32$$

e la s_{28}, secondo la penultima delle (3) è data da:

$$s_{28} = 59{,}946.26 - 467{,}438.74 - 1.925{,}237.44 + 93{,}635.98 - \\ - 9{,}627.91 = 1.601{,}753.04 .$$

Per verificare l'esattezza dei calcoli, si utilizza l'ovvia condizione che sommando le classi annuali relative a ciascun quinquennio, si deve ottenere l'ammontare della classe quinquennale corrispondente.

***

7. — La scissione di alcune classi quinquennali di esposti al rischio — maschi — e, conseguentemente, di casi e giornate di malattia, ha consigliato all'atto pratico, l'applicazione di alcune particolarità di calcolo che si discostano completamente da quelle adottate per la scissione delle rimanenti classi quinquennali.

Il servizio militare, infatti, che influisce direttamente sulla classe S_{20}, ne riduce, da un lato, l'intensità, e, dall'altra, imprime alla classe in esame un andamento che si diversifica notevolmente da quello che si rileva nella generalità delle osservazioni (1).

Tale differente intensità non solo altera in linea assoluta la classe quinquennale S_{20}, ma imprimerebbe — se ci fossimo serviti della classe in esame per effettuare, secondo il noto procedimento interpolatorio, la scissione delle classi quinquennali S_{15}, S_{20} ; . . . . . S_{60} — un andamento troppo discosto dal reale anche alle classi annuali da 15 a 34 anni.

Abbiamo, perciò, ritenuto opportuno di iniziare l'applicazione del noto procedimento di interpolazione dalla classe S_{25}, dopo aver costruito le classi fittizie

---

(1) L'annesso grafico (vedi fig. 3), che rappresenta l'andamento della funzione esposti al rischio (maschi), mette appunto in evidenza le accennate discrepanze.

In esso, la linea continua rappresenta l'andamento della funzione E_x così come risulta dall'osservazione diretta relativamente all'intervallo 15 |— 24 anni e, relativamente all'intervallo 25 |— 45, l'andamento della funzione stessa come risulta dalla interpolazione ; la linea a tratti rappresenta il probabile andamento della funzione E_x qualora non intervenissero le circostanze da noi indicate.

$$S_{20} = 3\,(S_{25} - S_{30}) + S_{35}$$

$$S_{25} = 3\,(S_{30} - S_{35}) + S_{40}$$

che si possono usare come le altre, determinando così le classi annuali di esposti al rischio, casi e giornate già perequate da 25 a 64 anni, e calcolando, in corrispondenza, i coefficienti di morbosità, le frequenze di malattia e le durate medie di ogni caso.

Per le classi da 15 a 24 anni abbiamo assunto senz'altro i dati grezzi che, per le ragioni espresse in precedenza, sono stati direttamente rilevati per classi annuali.

Abbiamo, in seguito, avvalendoci dei risultati della indagine diretta, calcolati i coefficienti di morbilità e la frequenza delle malattie, perequando, da ultimo, tali coefficienti e frequenze, con metodo grafico.

Allo scopo, poi, di effettuare il raccordo del ramo di curva di morbosità relativo all'intervallo 15 |– 25 con il ramo di curva relativo all'intervallo 25 |– 65, abbiamo proseguito l'interpolazione grafica, perequando anche i coefficienti e le frequenze corrispondenti all'intervallo 25 |– 35, benchè fossero stati precedentemente calcolati mediante classi annuali già perequate di esposti al rischio, casi e giornate di malattia.

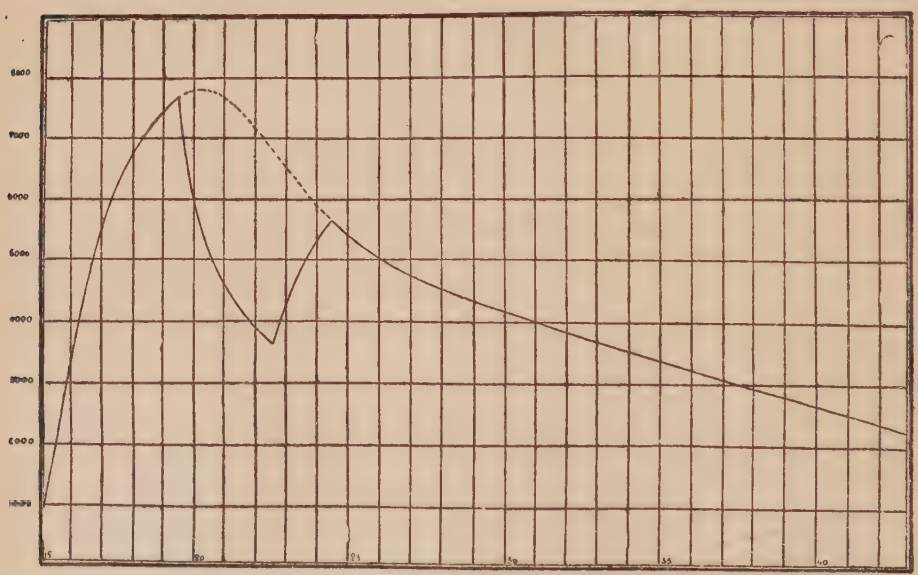


Fig. 3. — Esposti al rischio (maschi) distinti per età.

***

8. — Supponiamo di riferirci, come esempio, alla tavola A-2 (Tavola di morbilità per tutte le categorie commerciali — femmine).

Nella prima colonna abbiamo segnato i successivi valori dell'età x, in anni precisi. La seconda colonna riporta la successione, corrispondentemente ad ogni età intera x, degli esposti al rischio (E_x). Nella terza e nella quarta colonna abbiamo segnato la successione, per ogni età intera x, rispettivamente dei casi (c_x) e delle giornate di malattia (n_x).

La quinta, sesta e settima colonna si riferiscono, rispettivamente, al numero dei casi di malattia (f_x) e al numero delle giornate di malattia (z_x) per ogni esposto al rischio ed alla durata media (δ_x) di ogni caso di malattia: il tutto per ogni età intera x.

Per esempio — secondo le (11), (13), (14) — abbiamo rispettivamente:

$$z_{35} = \frac{7463}{991} = \mathbf{7{,}53078}$$

$$f_{29} = \frac{374}{1510} = \mathbf{0{,}248}$$

$$\delta_{38} = \frac{6188}{195} = \mathbf{31{,}73}$$

Nell'ottava colonna, infine, per comodità di lettura, abbiamo registrato nuovamente i successivi valori dell'età x.

Giova notare che la intavolazione dei dati, relativamente alle altre tavole, segue lo stesso ordine della tavola A-2, ora esaminata.

Esame sintetico delle tavole di morbilità e frequenza delle malattie calcolate dalla Cassa.

1. — Le tavole A, A 1, A 2, e la tavola grafica n° 1, si riferiscono alla morbilità e frequenza delle malattie — distintamente per sesso e per ogni età intera compresa tra 15 e 64 anni.

In generale, si può facilmente constatare come la morbilità delle femmine, se si esclude un breve decremento che si verifica tra i 40 ed i 50 anni, si mantenga normalmente più elevata della morbilità

maschile e, di conseguenza, delle morbosità dei maschi e delle femmine insieme.

Le tre curve di morbilità per maschi, femmine, maschi e femmine insieme, presentano, in corrispondenza delle età comprese tra i 40 e 50 anni un decremento generale, per poi seguire, a partire dai 50 anni, il normale andamento di decisa ascesa.

Per quanto riguarda la natura dell'accennato decremento che non trova d'altra parte assolutamente riscontro in nessuna delle tavole di morbilità esaminate e confrontate durante le attuali indagini, è necessario indicare, precisandole, quali a nostro avviso, sono le cause che intervengono determinando tale disarmonia di caratteri.

Le indagini necessarie per la ricerca della causa o delle cause perturbatrici del regolare andamento della curva, sono state estese a tutte le possibili particolarità del fenomeno allo scopo di cogliere anche ogni lieve discrepanza riguardante la intensità del fenomeno stesso.

Così, ad esempio, i coefficienti di morbilità e la frequenza delle malattie sono stati calcolati, per gruppi quinquennali, tenendo anche conto dei singoli grandi gruppi stabiliti della nomenclatura nosologica ufficiale per la Cassa (vedi al proposito appendice n° 2 e n° 6). Determinato in questo modo l'andamento delle varie curve riferentisi ai gruppi di malattia osservati, si è rilevato che la curva raffigurante l'andamento delle « Malattie infettive e parassitarie » (gruppo 1° — vedi anche prospetto n° 12 e fig. n° 4), presentava più delle altre un caratteristico avvallamento in corrispondenza delle età comprese tra i 35 e 64 anni.

Estendendo, poi, maggiormente le indagini ed analizzando le curve dei coefficienti di morbosità e frequenza delle malattie risultanti dalle osservazioni delle singole forme morbose componenti il grande gruppo « Malattie infettive e parassitarie », è stato possibile di rilevare che tra le forme morbose esaminate, la tubercolosi polmonare e le altre forme di tubercolosi potevano, più delle altre, influire su l'andamento disarmonico dei coefficienti generali di morbosità.

Infatti, le forme tubercolari in genere mentre da un lato presentano caratteristiche completamente differenti rispetto alle altre malattie esaminate, seguono, nel loro andamento, una linea discendente a partire dalle età comprese tra i 35 e 40 anni, non solo, *ma rappresentano sul totale delle giornate di malattia* (1.135.695) *rilevate durante le indagini una percentuale del* 14,64 %, *con giornate* 166.320.

Viene subito fatto di pensare che tale elevata percentuale di giornate spettanti alla tubercolosi, debba di necessità influire decisamente su l'andamento dei coefficienti generali di malattia, tanto più che dalle indagini, allo scopo effettuate, è risultato che la tubercolosi incide sui coefficienti generali di morbilità in ragione di una percentuale che oscilla, di solito, tra il 3 ed il 6 % (1).

Nell'appendice n° 3 è ancora meglio analizzato e precisato il concetto al quale ora ci riferiamo solo di sfuggita.

In effetti, si può affermare che, ove le forme tubercolari assumessero, per quanto riguarda il numero delle giornate di malattia, una intensità pari a quella che di solito si manifesta in tutte le esperienze da noi consultate, l'andamento della curva raffigurante i coefficienti generali di morbosità presenterebbe caratteristiche sostanzialmente diverse nel ramo che corre tra i 40 e 50 anni.

Le disposizioni sancite dallo Statuto della Cassa, per le quali l'Istituto è tenuto a corrispondere integralmente le stabilite indennità indipendentemente dall'eventuale cumulo con le altre indennità derivanti dall'assicurazione obbligatoria contro la tubercolosi, fanno si che il numero delle giornate di malattie indennizzate durante un intero esercizio risulti, come abbiamo anche potuto constatare in precedenza, sostanzialmente alterato nei confronti del numero delle giornate di malattia indennizzate nello stesso periodo di tempo da altri Istituti consimili, italiani ed esteri, i quali non siano tenuti, come la Cassa, al riconoscimento integrale dei diritti del prestatore d'opera colpito da tubercolosi.

***

2. — Le tavole *B*, *B* 1, *B* 2, ... *M*, *M* 1, *M* 2, e le tavole grafiche n° 2, 3 e 4 si riferiscono alla morbilità ed alla frequenza delle malattie relativamente alle categorie commerciali stabilite dalla clas-

---

(1) Così, ad esempio, presso la Cassa Generale di malattie di Amburgo, nel 1928, le giornate di malattia per tubercolosi rappresentavano, sul totale, una percentuale del 4,41 e nel 1929 tale percentuale saliva a 5,47. Nella Venezia Tridentina poi, ove come è noto operano tutt'ora le Casse Circondariali di Malattia, la percentuale delle giornate di malattie per tubercolosi raggiungeva nel 1927 una intensità pari a 5,2, nel 1928 a 2,8 nel 1929 a 2,7, nel 1930 infine a 3,4.

sificazione ufficiale della Cassa (1) distintamente per sesso e per gruppi quinquennali di età.

Le tavole *AA*, *AA* 1, *BB*, *BB* 1, *BB* 2, *CC*, *CC* 1, *CC* 2, *DD*, *DD* 1 *DD* 2, e le tavole grafiche n° 5, 6 e 7, si riferiscono alla morbilità e frequenza delle malattie relativamente alle professioni dei prestatori d'opera e distintamente per sesso e per gruppi quinquennali di età.

Le tavole *AAA*, *AAA* 1, *AAA* 2, . . . *RRR*, *RRR* 1, *RRR* 2 e le tavole grafiche n° 8, 9, 10 e 11, infine, si riferiscono alla morbilità e frequenza delle malattie relativamente alle regioni ove la Cassa opera, distintamente per sesso e per gruppi quinquennali di età. Non è stato possibile di calcolare la tavola di morbilità e frequenza delle malattie per la Lucania, a causa dello scarso numero di osservazioni che si sono riscontrate in questa regione.

Per facilitare l'esame e la comparazione delle tavole alle quali abbiamo accennato, sono stati elaborati alcuni prospetti (vedi al proposito i prospetti n° 4, 5, 6, 7, 8 e 9), nei quali, in corrispondenza con ogni quinquennio sono state riportate, in cifre assolute, le differenze tra la morbilità e la frequenza delle malattie in esame e la morbilità e la frequenza delle malattie risultanti dal complesso delle osservazioni.

In generale, per quanto riguarda i coefficienti di morbilità delle categorie commerciali, risulta che la categoria 5ª (macchine, utensili, ecc.), la categoria 8ª (alberghi, trattorie, caffè, ecc.), e la categoria 0 (gestioni diverse), hanno, mediamente, una morbilità superiore a quella che si rileva per tutte le categorie commerciali assicurate.

Nelle professioni, i viaggiatori e piazzisti, il personale tecnico-amministrativo e gli operai, presentano morbilità superiore alla media. Mentre però, per i viaggiatori e piazzisti e per il personale tecnico-amministrativo l'accennato aumento si verifica in corrispondenza delle prime tre classi quinquennali, per gli operai, al contrario, l'aumento pesa con una intensità che cresce con il crescere delle età su tutte le classi quinquennali considerate.

Tra le regioni, la Liguria, la Lombardia, l'Emilia, la Toscana, l'Umbria, le Calabrie e la Sicilia hanno una morbilità superiore alla media: tra queste, le Calabrie raggiungono il massimo della differenza e l'Umbria il minimo. Tra le regioni la cui morbosità è inferiore

---

(1) Appendice n° 5.

alla media, le Marche rappresentano il massimo della differenza e il Lazio il minimo : la morbilità di questa regione, anzi, quasi coincide con la morbilità media.

In genere poi, si può notare come le regioni settentrionali ed una parte delle regioni centrali accusino, nella maggioranza delle osservazioni, una morbilità più elevata delle regioni meridionali e delle isole (vedi al proposito tavola graf. nº 8).

Per quanto riguarda la frequenza delle malattie riferita alle categorie commerciali, possono ripetersi le considerazioni fatte relativamente alla loro morbosità. Infatti le categorie 5, 8, 0, hanno, mediamente, una frequenza di malattia, superiore a quella che si rileva per tutte le categorie commerciali assicurate.

Nelle professioni, invece, mentre il personale tecnico-amministrativo e gli operai seguono un comportamento analogo a quello che si rileva dall'esame della loro morbilità, i viaggiatori e piazzisti hanno, in ogni gruppo di età, una frequenza di malattia inferiore alla media.

Anche la frequenza regionale delle malattie si discosta, in qualche caso, dalle osservazioni fatte relativamente ai coefficienti di morbilità : così la Liguria, che presenta un coefficiente di morbilità più elevato del coefficiente di morbilità medio, ha una frequenza di malattia inferiore alla frequenza media. Analogo ragionamento vale anche per l'Emilia. Il Lazio e le Puglie, al contrario, pur presentando coefficienti di morilsità inferiori al coefficiente di morbosità medio, hanno una frequenza di malattia superiore alla frequenza media.

Per maggiore semplicità, nelle tavole grafiche nº 2, 3, 4, indichiamo con :

1 = la morbilità degli esposti al rischio dipendenti da aziende esercenti il commercio di animali vivi, materie prime, ecc. ;

2 = la morbilità degli esposti al rischio dipendenti da aziende esercenti il commercio di generi alimentari ;

3 = la morbilità degli esposti al rischio dipendenti da aziende esercenti il commercio di articoli per l'abbigliamento ;

4 = la morbilità degli esposti al rischio dipendenti da aziende esercenti il commercio di articoli per l'arredamento ;

5 = la morbilità degli esposti al rischio dipendenti da aziende esercenti il commercio di metalli, macchine, ecc. ;

6 = la morbilità degli esposti al rischio dipendenti da aziende esercenti il commercio di oggetti d'arte ;

7 = la morbilità degli esposti al rischio dipendenti da aziende esercenti il commercio di prodotti chimici e farmaceutici ;

8 = la morbilità degli esposti al rischio dipendenti da alberghi, trattorie, caffè, servizi sanitari, ecc. ;

9 = la morbilità degli esposti al rischio dipendenti da aziende esercenti le attività ausiliarie del commercio ;

0 = la morbilità degli esposti al rischio dipendenti da aziende esercenti commerci vari.

Nelle tavole grafiche nº 8, 9, 10 indichiamo con :

A = la morbilità degli esposti al rischio del Piemonte ;
B = la morbilità degli esposti al rischio della Liguria ;
C = la morbilità degli esposti al rischio della Lombardia ;
D = la morbilità degli esposti al rischio del Veneto ;
E = la morbilità degli esposti al rischio dell'Emilia ;
F = la morbilità degli esposti al rischio della Toscana ;
G = la morbilità degli esposti al rischio delle Marche ;
H = la morbilità degli esposti al rischio dell'Umbria ;
I = la morbilità degli esposti al rischio del Lazio ;
L = la morbilità degli esposti al rischio degli Abruzzi ;
M = la morbilità degli esposti al rischio della Campania ;
N = la morbilità degli esposti al rischio delle Calabrie ;
O = la morbilità degli esposti al rischio della Sicilia ;
P = la morbilità degli esposti al rischio della Sardegna.

Per la interpretazione dei diagrammi, si tenga presente che sull'asse delle ascisse sono state rappresentate le età e sull'asse delle oridnate le corrispondenti intensità dei vari fenomeni presi in esame.

Prospetto N. 4.

Differenze assolute tra i coefficienti di morbilità regionali ed i coefficienti ricavati per tutto il Regno.

Età	Regioni							
	Piemonte	Liguria	Lombardia	Veneto	Emilia	Toscana	Marche	Umbria
15–19 . .	— 0,667	+ 0,598	+ 0,422	— 0,224	+ 1,201	+ 0,630	— 2,235	+ 0,704
20–24 . .	— 1,773	+ 0,060	+ 0,316	— 1,023	+ 0,663	+ 0,127	— 3,010	+ 0,357
25–29 . .	— 1,477	+ 0,540	+ 0,853	— 0,930	+ 1,169	+ 0,414	— 2,905	+ 0,151
30–34 . .	— 1,278	+ 0,784	+ 0,823	— 1,051	+ 1,330	+ 0,214	— 3,137	— 0,189
35–39 . .	— 1,420	+ 0,963	+ 0,664	— 1,010	+ 1,397	— 0,111	— 3,318	— 1,372
40–44 . .	— 1,342	+ 1,473	+ 1,099	— 0,451	+ 1,619	+ 0,110	— 3,051	— 0,301
45–49 . .	— 1,465	+ 1,720	+ 1,341	— 0,257	+ 1,756	+ 0,468	— 3,071	— 0,743
50–54 . .	— 1,006	+ 2,173	+ 1,924	+ 0,159	+ 2,409	+ 1,096	— 3,496	— 0,212
55–59 . .	— 0,924	+ 1,685	+ 1,687	— 0,146	+ 2,766	+ 0,686	— 5,187	— 3,142
60–64 . .	— 0,082	+ 1,325	+ 1,846	+ 0,035	+ 3,673	+ 0,145	— 6,973	— 6,274
15–64 . .	— 1,079	+ 0,987	+ 0,949	— 0,618	+ 1,406	+ 0,681	— 2,786	+ 0,276

Età	Regioni							
	Lazio	Abruzzi	Campania	Puglie	Basilicata	Calabrie	Sicilia	Sardegna
15–19 . .	+ 0,033	— 0,696	— 1,628	— 0,721	—	+ 0,714	— 0,159	— 0,710
20–24 . .	— 0,637	— 2,206	— 3,003	— 1,606	—	+ 1,842	— 0,111	— 1,551
25–29 . .	— 0,366	— 2,650	— 3,152	— 1,499	—	+ 3,507	+ 0,473	— 1,218
30–34 . .	— 0,354	— 3,133	— 3,260	— 1,521	—	+ 4,278	+ 0,452	— 0,853
35–39 . .	— 0,380	— 3,591	— 3,240	— 1,615	—	+ 3,587	+ 0,412	— 0,263
40–44 . .	+ 0,158	— 2,868	— 2,803	— 1,036	—	+ 3,920	+ 1,118	+ 0.182
45–49 . .	+ 0,524	— 2,347	— 2,716	— 0,829	—	+ 4,605	+ 1,289	— 0,581
50–54 . .	+ 0,844	— 1,065	— 2,583	— 0,373	—	+ 6,786	+ 2,034	— 1,718
55–59 . .	— 0,343	+ 0,136	— 3,425	— 1,132	—	+ 6,401	+ 2,741	— 3,977
60–64 . .	— 1,884	+ 2,958	— 4,072	— 1,722	—	+ 4,771	+ 5,049	— 5,934
15–64 . .	— 0,099	— 2,167	— 2,597	— 1,206	—	+ 3,363	+ 0,863	— 1,297

PROSPETTO N. 5.

Differenze assolute tra i coefficienti di morbilità (M. F.) per professioni ed i coefficienti ricavati per tutto il Regno.

ETÀ	PROFESSIONI			
	Viaggiatori e piazzisti	Personale tecnico-amministrativo	Personale addetto alla vendita	Operai
15–19	+ 5,474	+ 2,036	+ 0,392	— 0,329
20–24	+ 1,836	+ 0,805	— 0,847	— 0,637
25–29	+ 0,285	+ 0,468	— 1,087	— 0,041
30–34	— 0,338	— 0,090	— 1,457	+ 0,116
35–39	— 0,720	— 0,616	— 1,774	+ 0,142
40–44	— 0,684	— 0,499	— 1,598	+ 0,629
45–49	— 1,176	— 0,668	— 1,799	+ 0,914
50–54	— 0,920	— 0,419	— 2,060	+ 1,476
55–59	— 1,198	— 1,154	— 3,374	+ 1,207
60–64	— 0,646	— 1,611	— 4,526	+ 1,271
15–64	+ 0,394	+ 0,619	— 1,045	+ 0,187

PROSPETTO N. 6.

Differenze assolute tra i coefficienti di morbilità (M. F.) per categorie commerciali ed i coefficienti ricavati per tutto il Regno.

ETÀ	CATEGORIE COMMERCIALI (1									
	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	0)
15–19	— 0,180	— 0,645	+ 0,768	— 0,675	+ 0,127	+ 1,955	— 0,371	+ 0,464	— 0,187	+ 0,723
20–24	— 0,933	— 0,895	— 0,144	— 0 633	— 0,041	— 0,764	— 0,851	— 0.234	— 1,624	+ 0,369
25–29	— 1,004	— 0,332	— 0,289	+ 0,201	+ 0,515	— 0,869	— 0,615	+ 0,045	— 1,972	+ 0,775
30–34	— 1,368	— 0,172	— 0,873	+ 0,039	+ 0,614	— 1,096	— 0.602	+ 0,112	— 2,399	+ 0,636
35–39	— 1,696	— 0,118	— 1,338	— 0,467	+ 0,457	— 1,428	— 0,764	+ 0,107	— 2,470	+ 0,240
40–44	— 1,201	+ 0,523	— 1,097	— 1,034	+ 0,721	— 1,313	— 0,135	+ 0,533	— 1,895	+ 0,268
45–49	— 0,838	+ 0,866	— 0,872	— 1,322	+ 0,450	— 1,310	— 0,421	+ 0,707	— 1,304	— 0,020
50–54	— 0,401	+ 1,685	— 0,616	— 0,979	+ 0,289	— 1,223	— 0,314	+ 1,118	— 0,650	+ 0,221
55–59	— 0,763	+ 1,843	— 1.145	— 0,008	— 0,828	— 2,016	— 1,511	+ 0,558	— 0,788	— 0,278
60–64	— 0,778	+ 2,661	— 2,124	+ 2,256	— 1,572	— 2,748	— 2,148	+ 0,117	— 0,703	— 0,255
15–64	— 0,502	— 0,214	— 0,318	— 0,327	+ 0,718	— 0,845	— 0,208	+ 0,586	— 1,428	+ 0,536

(1) Per il significato dei simboli, vedasi pagg. 111 e 112.

PROSPETTO N. 7.

Differenze assolute tra le frequenze di malattia (M. F.) regionali e le frequenze ricavate per tutto il Regno.

ETÀ	REGIONI							
	Piemonte	Liguria	Lombardia	Veneto	Emilia	Toscana	Marche	Umbria
15–19 . .	— 0,044	— 0,019	+ 0,014	— 0,005	+ 0,016	+ 0,031	— 0,049	+ 0,005
20–24 . .	— 0,086	— 0,061	+ 0,009	— 0,029	— 0,016	+ 0,010	— 0,073	+ 0,014
25–29 . .	— 0,089	— 0,062	+ 0,017	— 0,036	— 0,023	+ 0,007	— 0,086	+ 0,025
30–34 . .	— 0,080	— 0,064	+ 0,019	— 0,040	— 0,016	+ 0,003	— 0,099	+ 0,027
35–39 . .	— 0,071	— 0,060	+ 0,019	— 0,034	— 0,015	+ 0,006	— 0,106	— 0,006
40–44 . .	— 0,056	— 0,037	+ 0,031	— 0,009	+ 0,004	+ 0,020	— 0,087	— 0,015
45–49 . .	— 0,054	— 0,032	+ 0,028	— 0,002	— 0,003	+ 0,025	— 0.115	— 0,056
50–54 . .	— 0,033	— 0,012	+ 0,046	+ 0,014	+ 0,009	+ 0,037	— 0,076	— 0 046
55–59 . .	— 0,026	— 0,016	+ 0,048	+ 0,014	— 0,004	+ 0,025	— 0,103	— 0,076
60–64 . .	— 0,018	— 0,026	+ 0,052	+ 0,015	— 0,018	0,000	— 0.139	— 0,109
15–64 . .	— 0,055	— 0,037	+ 0,027	— 0,017	— 0,003	+ 0,026	— 0,071	+ 0,016

ETÀ	REGIONI							
	Lazio	Abruzzi	Campania	Puglie	Basilicata	Calabrie	Sicilia	Sardegna
15–19 . .	+ 0,028	+ 0,061	— 0,050	— 0,036	—	+ 0,090	+ 0,034	— 0,022
20–24 . .	+ 0,017	— 0,005	— 0,082	— 0,030	—	+ 0,198	+ 0,041	— 0,016
25–29 . .	+ 0,022	— 0,038	— 0,091	— 0,008	—	+ 0,303	+ 0,053	+ 0,006
30–34 . .	+ 0,025	— 0,054	— 0,096	+ 0,014	—	+ 0,367	+ 0,053	+ 0,026
35–39 . .	+ 0,030	— 0,063	— 0,094	+ 0,030	—	+ 0,342	+ 0,045	+ 0,036
40–44 . .	+ 0,052	— 0,051	— 0,077	+ 0,054	—	+ 0,316	+ 0,052	+ 0,042
45–49 . .	+ 0,060	— 0,049	— 0,076	+ 0,054	—	+ 0,288	+ 0,039	+ 0,004
50–54 . .	+ 0,072	— 0,018	— 0,069	+ 0,054	—	+ 0,338	+ 0,061	— 0,016
55–59 . .	+ 0,045	+ 0,008	— 0,087	+ 0,018	—	+ 0,363	+ 0,096	— 0,056
60–64 . .	— 0,005	+ 0,049	— 0,112	— 0,031	—	+ 0,374	+ 0,170	— 0,086
15–64 . .	+ 0,038	— 0,017	— 0,070	+ 0,007	—	+ 0,269	+ 0,059	— 0,015

PROSPETTO N. 8.

Differenze assolute tra le frequenze di malattie (M. F.) per professioni e le frequenze ricavate per tutto il Regno.

ETÀ	PROFESSIONI			
	Viaggiatori e piazzisti	Personale Tecnico-Amministrativo	Personale addetto alla vendita	Operai
15-19	0,000	+ 0,067	+ 0,004	— 0,010
20-24	— 0,034	+ 0,038	— 0,034	— 0,010
25-29	— 0,045	+ 0,011	— 0,051	+ 0.003
30-34	— 0,052	— 0,016	— 0,061	+ 0,009
35-39	— 0,054	— 0,035	— 0,064	+ 0,009
40-44	— 0,038	— 0,026	— 0,051	+ 0,026
45-49	— 0,042	— 0,035	— 0,060	+ 0,028
50-54	— 0,059	— 0,028	— 0,058	+ 0,045
55-59	— 0,082	— 0,038	— 0,077	+ 0,041
60-64	— 0,086	— 0,046	— 0,099	+ 0,034
15-64	— 0,010	+ 0,005	— 0,037	+ 0,012

PROSPETTO N. 9.

Differenze assolute tra le frequenze di malattie (M. F.) per categorie commerciali e le frequenze ricavate per tutto il Regno.

ETÀ	CATEGORIE COMMERCIALI (1)									
	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	0)
15–19	— 0,002	— 0,022	+ 0,009	— 0.011	+ 0,005	+ 0,018	+ 0,004	+ 0,014	— 0,029	+ 0,070
20–24	— 0,038	— 0,025	— 0,018	— 0,028	+ 0,014	— 0,030	— 0,025	— 0,005	— 0,073	+ 0,056
25–29	— 0,051	— 0,014	— 0,029	— 0,019	+ 0,034	— 0,053	— 0,034	— 0,007	— 0,090	+ 0,057
30–34	— 0,057	— 0,010	— 0,039	— 0,012	+ 0,046	— 0,068	— 0,037	— 0,009	— 0,101	+ 0,058
35–39	— 0,065	— 0,004	— 0,042	— 0,022	+ 0,039	— 0,080	— 0,039	— 0,007	— 0,098	+ 0,059
40–44	— 0,057	+ 0,017	— 0,029	— 0,025	+ 0,038	— 0,076	— 0,021	+ 0,012	— 0,074	+ 0,077
45–49	— 0,063	+ 0,026	— 0.028	— 0,016	+ 0,015	— 0,077	— 0,029	+ 0,013	— 0,059	+ 0,074
50–54	— 0,046	+ 0,048	— 0,019	— 0,022	+ 0,022	— 0,058	— 0,017	+ 0,027	— 0,042	+ 0,090
55–59	— 0,050	+ 0,056	— 0,032	— 0,015	+ 0,008	— 0,063	— 0,035	+ 0,020	— 0,055	+ 0,082
60–64	— 0,059	+ 0,069	— 0,051	— 0,003	— 0,008	— 0,083	— 0,054	+ 0,012	— 0,079	+ 0,070
15–64	— 0.031	— 0.007	— 0,018	— 0,019	+ 0,045	— 0,043	— 0,053	+ 0.016	— 0,066	+ 0,068

(1) Per il significato dei simboli vedasi pagg. 111 e 112.

3. — Allo stato attuale delle indagini, pur riaffermando integralmente i concetti esposti nella « Introduzione » e nelle « Considerazioni generali », per quanto riguarda il valore intriseco dei coefficienti calcolati dalla Cassa, sembra per altro prematuro di affermare, con efficacia, l'esistenza di una morbilità regionale e di una morbilità professionale, così come sembra azzardato di parlare, oggi, di perequazione e sperequazione di rischio.

Le differenze che si notano confrontando i singoli coefficienti di morbilità e la frequenza delle malattie rispettivamente con il coefficiente di morbilità e la frequenza delle malattie, riferiti l'uno e l'altro al complesso delle osservazioni, anche quando assumono un peso rilevante, non possono senz'altro attribuirsi a caratteristiche sostanzialmente diverse degli esposti a rischio. Molto probabilmente, esse dipendono dalla scarsa ampiezza di alcune classi di osservazioni, così come possono rappresentare la risultante della diversità di apprezzamento e valutazione delle singole malattie, come pure, infine, possono dipendere dal verificarsi e dal ripetersi di complessi fenomeni soggettivi che si possono facilmente riconoscere sol che si pensi alla promiscuità di concetti, naturale e scusabile nei primi anni d'esercizio dell'assicurazione, che infirma sin dal loro inizio, i casi di malattia denunciati, alterandone, successivamente, il loro corso ed il loro esito.

Tanto che, al termine di questa memoria, pare opportuno ripetere i concetti conclusivi esposti dal Prof. Toja nella « Introduzione ».

I risultati, cioè, ottenuti dalla Cassa nel corso delle attuali indagini potranno servire di base, nella loro schematica espressione, per la valutazione e comprensione della morbilità dei prestatori d'opera del commercio, solo se saranno opportunamente vagliati ed interpretati e se si terrà il debito conto delle circostanze perturbatrici che intervengono nei primi anni di esercizio.

APPENDICI

N° 1. — Distribuzione dei casi di malattia secondo la durata. Coefficienti di riduzione.

1. — I casi di malattia rilevati nel corso del 1931, distinti secondo la durata, e le giornate di malattia ad essi riferentisi, sono riportate nel successivo prospetto n. 10. Da tali osservazioni è possibile dedurre i coefficienti riportati nel prospetto n. 11, mediante i quali si può facilmente determinare il numero dei giorni di malattia — fatto = 1000 il totale dei giorni di malattia che si rilevano quando la durata del periodo indennizzato è di 180 giorni e le prestazioni decorrono dal primo giorno — per periodi di indennizzabilità minori e relativamente a differenti tipi di carenza.

I coefficienti di riduzione così ricavati rappresentano il risultato diretto dalle osservazioni. Non si è, pertanto, ritenuto utile di perequarli.

PROSPETTO N. 10.

Casi e giornate di malattia secondo la durata.

DURATA DELLE MALATTIE	NUMERO DEI CASI				NUMERO DELLE GIORNATE DI MALATTIA			
	Cifre assolute		Cifre relative		Cifre assolute		Cifre relative	
	Totali parziali	Totali progressivi	Totali parz.	Totali prog.	Totali parziali	Totali progressivi	Totali parz.	Totali prog.
fino a 1 giorno	67	—	0,15	0,15	67	—	—	—
» 2 »	480	587	1,10	1,25	960	1.027	0,08	0,08
» 3 »	455	1.002	1,04	2,29	1.365	2.392	0,12	0,20
» 4 »	936	1.938	2,14	4,43	3.744	6.136	0,33	0,53
» 5 »	1.586	3.524	3,62	8,05	7.930	14.066	0,70	1,23
» 6 »	2.345	5.869	5,36	13,41	14.070	28.136	1,24	2,47
» 7 »	2.779	8.648	6,35	19,76	19.453	47.589	1,71	4,18
» 8 »	3.473	12.121	7,93	27,69	27.784	75.373	2,45	6,63
» 9 »	2.940	15.061	6,72	34,41	26.460	101.833	2,33	8,96
» 10 »	2.324	17.385	5,31	39,72	23.240	125.073	2,05	11,01
» 11 »	1.879	19.264	4,29	44,01	20.669	145.742	1,82	12,83
» 12 »	1.534	20.798	3,50	47,51	18.408	164.150	1,62	14,45
» 13 »	1.384	22.182	3,16	50,67	17.992	182.142	1,59	16,04
» 14 »	1.339	23.521	3,06	53,73	18.746	200.888	1,65	17,69
» 15 »	1.499	25.020	3,42	57,15	22.485	223.373	1,98	19,67
da 16 a 20	4.702	29.722	10,73	67,88	84.636	308.009	7,45	27,12
» 21 » 25	2.897	32.619	6,62	74,50	66.631	374.640	5,87	32,99
» 26 » 30	1.890	34.509	4,32	78,82	52.920	427.560	4,66	37,65
» 31 » 40	2.516	37.025	5,75	84,57	89.318	516.878	7,86	45,51
» 41 » 50	1.479	38.504	3,38	87,95	67.294,5	584.172,5	5,93	51,44
» 51 » 60	1.058	39.562	2,42	90,37	58.719	642.891,5	5,17	56,61
» 61 » 90	1.702	41.264	3,88	94,25	128.501	771.392,5	11,31	67,92
» 91 » 120	743	42.007	1,70	95,95	78.386,5	849.779	6,90	74,82
» 121 » 150	449	42.456	1,03	96,98	60.839,5	910.618,5	5,36	80,18
» 151 » 180	1.321	43.777	3,02	100 —	225.076,5	1.135.695	19,82	100 —
	43.777	—	100 —	—	1.135.695 —	—	100 —	—

PROSPETTO N. 11.

GIORNO IN CUI HA INIZIO L'INDENNIZZABILITÀ DELLA MALATTIA	DURATA MASSIMA DEL PERIODO INDENNIZZABILE (giorni)					
	30	60	90	120	150	180
	Coefficienti di riduzione.					
dal 1° giorno	376	566	679	748	842	1.000
» 2° »	346	531	643	711	764	961
» 3° »	316	496	607	674	727	923
» 4° »	286	462	571	638	690	885
» 5° »	256	428	535	602	653	847
» 6° »	228	395	501	566	601	810
» 7° »	200	463	467	533	586	775
» 8° »	175	334	436	501	552	742
» 9° »	152	306	408	471	522	711
» 10° »	133	282	382	445	495	683

N. 2. — TAVOLE DI MORBILITÀ E FREQUENZA SECONDO LE MALATTIE.

1. — Come abbiamo rilevato in precedenza (vedi « Esame sintetico ecc. . . . . »), per determinare le cause perturbatrici della curva generale di morbilità nel ramo che corre tra 40-50 anni, le indagini statistiche sono state dirette anche all'esame dei singoli coefficienti di morbilità secondo i grandi gruppi di malattia stabiliti dall'elenco nosologico ufficiale della Cassa (1).

Le elaborazioni così eseguite hanno presentato, in pratica, non solo una particolare importanza dal punto di vista della ricerca dei fenomeni estranei al normale andamento della curva di morbilità, ma anche un significativo interesse scientifico per la determinazione delle leggi che governano, normalmente, l'andamento dei coefficienti di morbilità riferiti alle età, al sesso ed alle differenti forme morbose.

(1) Vedi appendice n° 6.

2. — I prospetti n. 12, 13, 14, . . . 26 e le figure 4, 5, 6, . . . , 17, si riferiscono appunto alle indagini delle quali ci stiamo occupando.

Dall'esame comparato di questi prospetti e, ancor meglio, dall'esame delle figure allegate, risulta che il massimo contributo alla morbilità dei prestatori d'opera del commercio, viene apportato dalle « Malattie infettive e parassitarie ». Di queste, la morbilità delle femmine tra 15 e 35 anni è anche superiore a quella dei maschi e quindi dei maschi e delle femmine insieme. A partire dai 35 anni e sino a 55 anni la morbilità femminile di questo gruppo, presenta un notevole avvallamento, forse dovuto alla scarsità delle osservazioni, scendendo al disotto della curva di morbosità maschile.

La morbilità per « Tumori e granulomi » ha un andamento che cresce con l'aumentare delle età. Anche in questo gruppo la morbilità femminile risulta più elevata della morbosità maschile.

Andamento pressochè uguale hanno i coefficienti di morbilità per « Malattie reumatiche, della nutrizione ed altre malattie generali » e per le « Malattie del sangue e degli organi emopoietici ». Senonchè mentre per le « Malattie reumatiche », la morbilità femminile nel tratto che corre sino ai 45 anni è inferiore alla morbilità maschile e a partire dai 45 anni risulta superiore, la morbosità per « Malattie del sangue » è normalmente ed ininterrottamente più elevata per le femmine.

Per quanto riguarda le « Malattie mentali, del sistema nervoso e degli organi dei sensi » si nota, sia per le femmine che per i maschi, una inflessione nella curva di morbilità compresa tra i 35 e 45 ani.

La morbilità per « Avvelenamenti, intossicazioni ed anafilassi », risulta molto bassa : essa, poi, segue un andamento pressochè costante ed indipendente dalle età.

Le « Malattie dell'apparecchio respiratorio » colpiscono di preferenza le femmine sino ai 35 anni, con un massimo tra 30 e 35 anni.

L'andamento della curva di morbilità per « Malattie dell'apparecchio circolatorio e linfatico » è regolarmente crescente con le età. La morbilità maschile è, in queste malattie, superiore alla morbosità femminile.

Le « Malattie dell'apparecchio digerente », al contrario, sembrano colpire di preferenza le femmine. La curva di morbilità aumenta molto rapidamente sino a 35 anni per poi seguire un andamento pressochè costante.

Nelle « Malattie dell'apparecchio uro-genitale » la morbilità femminile si mantiene normalmente più elevata di quella maschile.

La morbilità per « gravidanza, malattie della gravidanza, parto, stato puerperale », presenta un andamento particolarissimo. La curva, infatti, parte da un valore iniziale piccolissimo, compreso tra 15 e 20 anni ; raggiunge il massimo verso 30 anni, per assumere, poi, tra i 50 e 55 anni, dopo una rapidissima discesa, un valore molto prossimo a zero.

La morbilità maschile per « Malattie della pelle e del cellulare, dei muscoli, delle ossa e delle articolazioni », si mantiene, quasi sempre, più elevata della morbosità femminile. La morbilità dipendente da queste malattie presenta un avvallamento in corrispondenza delle età tra 45 e 55 anni.

Dalle « Malattie da causa violenta » sono, in generale, maggiormente colpiti i maschi, mentre le femmine sembra presentino una morbilità maggiore dei maschi in corrispondenza delle età più avanzate.

Le « Malattie da cause non specificate o mal definite » presentano un andamento completamente indipendente dalle età. La curva che raffigura la morbilità di queste malattie mantiene quasi sempre uguale livello, tanto da coincidere quasi esattamente con una retta.

PROSPETTO N. 12.

Malattie infettive e parassitarie.

MASCHI E FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.447	42.506	0,040	1,18352	29,38	15–19
20–24	2.158	65.554	0,056	1,58701	30,38	20–24
25–29	2.343	63.889	0,068	1,85184	27,27	25–29
30–34	1.966	50.450	0,073	1,94762	25,66	30–34
35–39	1.408	37.092	0,072	1,87505	26,34	35–39
40–44	1.044	27.694	0,066	1,66868	26,53	40–44
45–49	643	14.352	0,059	1,47459	22,32	45–49
50–54	382	10.063	0,052	1,30514	26,34	50–54
55–59	298	7.494	0,046	1,18654	25,15	55–59
60–64	155	4.120	0,041	1,09313	26,58	60–64
15–64	11.844	323.214	0,062	1,69165	27,29	15–64

PROSPETTO N. 12-*a*.

MASCHI.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.044	28.460	0,038	1,03389	27,26	15–19
20–24	1.428	38.444	0,039	1,44604	26,92	20–24
25–29	1.734	43.977	0,068	1,74912	25,36	25–29
30–34	1.510	37.993	0,075	1,91299	25,16	30–34
35–39	1.126	28.907	0,074	1,89443	25,67	35–39
40–44	843	23.076	0,069	1,75244	27,37	40–44
45–49	558	11.839	0,061	1,52309	21,22	45–49
50–54	350	9.374	0,054	1,34313	26,78	50–54
55–59	264	6.685	0,047	1,18521	25,32	55–59
60–64	141	3.554	0,041	1,04345	25,21	60–64
15–64	8.998	232.309	0,062	1,59666	25,62	15–64

PROSPETTO N. 12-*b*.

FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	403	14.046	0,048	1,67453	34,85	15–19
20–24	730	27.110	0,060	2,04179	37,14	20–24
25–29	609	19.912	0,068	2,17413	32,70	25–29
30–34	456	12.457	0,069	2,04562	27,32	30–34
35–39	282	8.185	0,065	1,79706	29,02	35–39
40–44	201	4.618	0,056	1,47990	22,98	40–44
45–49	85	2.513	0,048	1,24897	29,56	45–49
50–54	32	689	0,043	1,12002	21,53	50–54
55–59	34	809	0,041	1,26641	23,79	55–59
60–64	14	566	0,039	1,55923	40,43	60–64
15–64	2.846	90.905	0,062	1,99497	31,94	15–64

N. B. – Per il significato dei simboli, vedasi pag. 107.

PROSPETTO N. 13.

Tumori e granulomi.

MASCHI E FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	30	800	0,001	0,02227	26,67	15–19
20–24	31	1.106	0,001	0,02949	35,68	20–24
25–29	34	732	0,001	0,04181	21,53	25–29
30–34	39	1.767	0,002	0,06401	45,31	30–34
35–39	44	1.594	0,002	0,08898	36,23	35–39
40–44	24	1.809	0,002	0,11577	75,37	40–44
45–49	26	1.575	0,002	0,14901	60,58	45–49
50–54	24	1.298	0,003	0,21154	54,08	50–54
55–59	23	1.598	0,004	0,32464	69,48	55–59
60–64	15	1.805	0,004	0,47891	120,33	60–64
15–64	290	14.084	0,002	0,07371	48,56	15–64

PROSPETTO N. 13-*a*.

MASCHI.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	24	666	0,001	0,02419	27,65	15–19
20–24	23	904	0,001	0,02960	39,30	20–24
25–29	23	441	0,001	0,03658	19,17	25–29
30–34	23	1.086	0,001	0,04726	47,22	30–34
35–39	25	863	0,001	0,05975	34,52	35–39
40–44	9	706	0,002	0,07999	78,44	40–44
45–49	15	968	0,002	0,09118	64,53	45–49
50–54	22	1.089	0,003	0,14338	49,60	50–54
55–59	16	1.014	0,003	0,28259	63,37	55–59
60–64	14	1.783	0,004	0,52349	127,36	60–64
15–64	194	9.520	0,001	0,06543	49,07	15–64

PROSPETTO N. 13-*b*.

FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	6	134	0,001	0,01598	22,33	15–19
20–24	8	202	0,001	0,03879	25,25	20–24
25–29	11	291	0,002	0,06811	26,45	25–29
30–34	16	681	0,003	0,12916	42,56	30–34
35–39	19	731	0,004	0,19561	38,47	35–39
40–44	15	1.103	0,004	0,25478	73,53	40–44
45–49	11	607	0,005	0,34772	55,18	45–49
50–54	2	209	0,005	0,38760	10,45	50–54
55–59	7	584	0,005	0,31398	83,43	55–59
60–64	1	22	0,003	0,06061	22,00	60–64
15–64	96	4.564	0,002	0,10016	47,54	15–64

Prospetto N. 14.

Malattie reumatiche, della nutrizione e delle glandole a secrezione interna. Altre malattie generali.

Maschi e Femmine.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	298	6.662	0,008	0,18549	22,36	15–19
20–24	403	8.290	0,012	0,25110	20,57	20–24
25–29	517	9.789	0,015	0,31953	18,93	25–29
30–34	514	11.560	0,019	0,38796	22,49	30–34
35–39	414	7.777	0,022	0,43807	18,78	35–39
40–44	342	6.888	0,024	0,48687	20,14	40–44
45–49	313	6.246	0,025	0,56141	19,96	45–49
50–54	208	4.902	0,026	0,63864	23,57	50–54
55–59	151	4.906	0,027	0,69243	32,49	55–59
60–64	110	2.633	0,029	0,69859	23,94	60–64
15–64	3.270	69.653	0,017	0,36455	21,30	15–64

Prospetto N. 14-*a*.

Maschi.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	231	5.069	0,008	0,18415	21,94	15–19
20–24	290	5.541	0,013	0,25890	19,11	20–24
25–29	423	7.530	0,017	0,33493	17,80	25–29
30–34	425	9.612	0,021	0,40205	22,62	30–34
35–39	351	6.028	0,024	0,44385	17,17	35–39
40–44	273	4.862	0,025	0,48330	17,81	40–44
45–49	271	5.425	0,026	0,55749	20,02	45–49
50–54	181	4.191	0,027	0,63804	23,15	50–54
55–59	139	4.284	0,029	0,70707	30,82	55–59
60–64	106	2.509	0,031	0,73664	23,67	60–64
15–64	2.690	55.051	0,018	0,37837	20,46	15–64

Prospetto N. 14-*b*.

Femmine.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	67	1.593	0,008	0,18991	23,78	15–19
20–24	113	2.749	0,010	0,23467	24,33	20–24
25–29	94	2.259	0,012	0,28002	24,03	25–29
30–34	89	1.948	0,014	0,35087	21,89	30–34
35–39	63	1.749	0,016	0,42024	27,76	35–39
40–44	69	2.026	0,019	0,49748	29,36	40–44
45–49	42	821	0,021	0,57749	19,55	45–49
50–54	27	711	0,021	0,63336	26,33	50–54
55–59	12	622	0,017	0,56114	51,83	55–59
60–64	4	124	0,011	0,34160	31,00	60–64
15–64	580	14.602	0,013	0,32045	25,18	15–64

Prospetto N. 15.

Malattie del sangue e degli organi emopoietici.

Maschi e Femmine.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	55	1.705	0,0015	0,04747	31,00	15–19
20–24	81	2.358	0,0017	0,05183	29,11	20–24
25–29	48	1.540	0,0016	0,05211	32,08	25–29
30–34	36	1.294	0,0014	0,05114	35,94	30–34
35–39	20	872	0,0011	0,04931	43,60	35–39
40–44	18	806	0,0009	0,04546	44,78	40–44
45–49	6	523	0,0007	0,03525	87,17	45–49
50–54	3	79	0,0006	0,03233	26,33	50–54
55–59	1	15	0,0007	0,05642	15,00	55–59
60–64	4	411	0,0011	0,10905	102,75	60–64
15–64	272	9.603	0,0014	0,05026	35,31	15–64

Prospetto N. 15-*a*.

Maschi.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	24	440	0,0009	0,01598	18,33	15–19
20–24	30	906	0,0009	0,02093	30,20	20–24
25–29	13	209	0,0008	0,02180	16,08	25–29
30–34	17	584	0,0007	0,02172	34,35	30–34
35–39	8	238	0,0006	0,01931	29,75	35–39
40–44	7	178	0,0005	0,01776	25,43	40–44
45–49	1	222	0,0003	0,01414	22,00	45–49
50–54	1	18	0,0003	0,01607	18,00	50–54
55–59	1	15	0,0005	0,03403	15,00	55–59
60–64	3	231	0,0009	0,06782	77,00	60–64
15–64	105	3.041	0,0007	0,02090	28,96	15–64

Prospetto N. 15-*b*.

Femmine.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	31	1.265	0,0037	0,15081	40,81	15–19
20–24	51	1.452	0,0040	0,14411	28,47	20–24
25–29	35	1.331	0,0038	0,13995	38,03	25–29
30–34	19	710	0,0035	0,14162	37,37	30–34
35–39	12	634	0,0031	0,15198	52,83	35–39
40–44	11	628	0,0029	0,15110	57,09	40–44
45–49	5	301	0,0026	0,13623	60,20	45–49
50–54	2	61	0,0023	0,17221	30,50	50–54
55–59	—	—	0,0024	0,29228	—	55–59
60–64	1	180	0,0027	0,49587	180,00	60–64
15–64	167	6.562	0,0037	0,14001	39,29	15–64

Prospetto N. 16.

Malattie mentali.

Maschi e Femmine.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	168	4.406	0,004	0,12268	26,23	15–19
20–24	288	8.859	0,008	0,24867	30,76	20–24
25–29	419	12.421	0,012	0,36264	29,64	25–29
30–34	380	11.986	0,014	0,44161	31,54	30–34
35–39	336	10.085	0,016	0,50649	30,01	35–39
40–44	232	6.861	0,016	0,55596	29,57	40–44
45–49	192	7.732	0,017	0,66469	40,27	45–49
50–54	149	5.682	0,019	0,80843	38,13	50–54
55–59	123	6.170	0,020	1,01783	50,16	55–59
60–64	83	4.678	0,022	1,24118	56,36	60–64
15–64	2.370	78.880	0,012	0,41285	33,28	15–64

Prospetto N. 16-*a*.

Maschi.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	140	3.718	0,005	0,13507	26,56	15–19
20–24	213	5.646	0,009	0,25798	26,50	20–24
25–29	333	9.591	0,013	0,37521	28,80	25–29
30–34	312	9.756	0,015	0,45353	31,27	30–34
35–39	273	7.906	0,017	0,51151	28,96	35–39
40–44	180	4.893	0,017	0,54581	27,18	40–44
45–49	158	6.422	0,018	0,64722	40,65	45–49
50–54	131	4.684	0,019	0,79874	35,76	50–54
55–59	107	5.356	0,021	1,04963	50,06	55–59
60–64	81	4.572	0,024	1,34234	56,44	60–64
15–64	1.928	62.544	0,013	0,42986	32,44	15–64

Prospetto N. 16-*b*

Femmine.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	28	688	0,001	0,02499	24,57	15–19
20–24	75	3.213	0,005	0,19077	42,84	20–24
25–29	86	2.830	0,008	0,31461	32,91	24–29
30–34	68	2.230	0,011	0,40552	32,79	30–34
35–39	63	2.179	0,014	0,49559	34,59	35–39
40–44	52	1.968	0,015	0,60399	37,85	40–44
45–49	34	1.310	0,017	0,76116	38,53	45–49
50–54	18	998	0,017	0,83564	55,44	50–54
55–69	16	814	0,014	0,69241	50,88	55–59
60–64	2	106	0,006	0.29201	53,00	60–64
15–64	442	16.336	0,010	0,35850	36,96	15–64

PROSPETTO N. 17.

Avvelenamenti ed intossicazioni. — Anafilassi.

MASCHI E FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	26	486	0,0007	0.01353	18,69	15–19
20–24	32	290	0,0009	0.01549	9,06	20–24
25–29	39	949	0,0010	0,01725	24,33	25–29
30–34	27	266	0,0010	0,01557	9,85	30–34
35–39	17	316	0,0009	0,01477	18,59	35–39
40–44	9	126	0.0008	0,01548	14,00	40–44
45–49	11	171	0,0009	0,01909	15,55	45–49
50–54	9	324	0,0009	0.02249	36,00	50–54
55–59	5	80	0,0009	0.02170	16,00	55–59
60–64	3	70	0,0008	0,01857	23,33	60–64
15–64	178	3.078	0,0009	0,01611	17,29	15–64

PROSPETTO N. 17-*a*.

MASCHI.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	19	320	0,0007	0,01162	16,84	15–19
20–24	20	192	0,0008	0 01363	9,60	20–24
25–29	25	591	0,0009	0,01535	23,64	25–29
30–34	21	211	0,0010	0,01450	10,05	30–34
35–39	11	212	0,0009	0,01417	19,27	35–39
40–44	9	126	0.0010	0,01648	14,00	40–44
45–49	10	139	0,0010	0.02062	13,90	45–49
50–54	9	324	0,0010	0,02327	36,00	50–54
55–59	4	69	0,0009	0,01732	17,25	55–59
60–64	2	20	0,0006	0.00587	10,00	60–64
15–64	130	2.204	0.0009	0,01515	16,95	15–64

PROSPETTO N. 17-*b*.

FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	7	166	0,0008	0,01979	23,71	15–19
20–24	12	98	0,0011	0,02192	8,17	20–24
25–29	14	358	0,0012	0,02004	25,57	25–29
30–34	6	55	0,0012	0,01767	9,15	30–34
35–39	6	104	0,0011	0,01785	17,33	35–39
40–44	—	—	0,0009	0,01795	—	40–44
45–49	1	32	0,0008	0,31834	32,00	45–49
50–54	—	—	0,0012	0,03749	—	50–54
55–59	1	21	0,0020	0,07769	11,00	55–59
60–64	1	50	0,0028	0,13774	50,00	60–64
15–64	48	874	0,0011	0,01918	18,21	15–64

Prospetto N. 18.

Malattie dell'apparato respiratorio.

Maschi e Femmine.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	494	16.298	0,014	0,45379	32,41	15–19
20–24	617	19.527	0,018	0,56903	31,61	20–24
25–29	752	22.340	0,022	0,67527	30,79	25–29
30–34	667	20.422	0,024	0,76071	31,70	30–34
35–39	498	15.443	0,026	0,79889	30,73	35–39
40–44	370	12.600	0,026	0,80192	30,84	40–44
45–49	273	8.165	0,026	0,77342	29,75	45–49
50–54	204	6.398	0,027	0,76489	28,33	50–54
55–59	156	4.088	0,031	0,78773	25,41	55–59
60–64	134	3.204	0,036	0,85009	23,61	60–64
15–64	4.175	128.485	0,022	0,67247	30,77	15–64

Prospetto N. 18-*a*.

Maschi.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	375	11.739	0,014	0,42645	31,30	15–19
20–24	411	11.850	0,018	0,52940	28,83	20–24
25–29	560	15.336	0,023	0,63832	27,39	25–29
30–34	530	15.052	0,026	0,74951	28,40	30–34
35–39	409	11.975	0,027	0,80427	29,28	35–39
40–44	323	10.377	0,027	0,81872	32,13	40–44
45–49	242	6.999	0,027	0,78700	28,92	45–49
50–54	191	5.360	0,028	0,77112	28,06	50–54
55–59	140	3.639	0,031	0,80008	25,99	55–59
60–64	126	3.009	0,037	0,88344	23,88	60–64
15–64	3.307	95.336	0,023	0,65524	28,83	15–64

Prospetto N. 18-*b*.

Femmine.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	119	4.559	0,014	0,54351	38,82	15–19
20–24	206	7.677	0,018	0,67782	37,66	20–24
25–29	192	7.004	0,020	0,77248	38,62	25–29
30–34	137	5.370	0,021	0,80487	38,33	30–34
35–39	89	3.468	0,019	0,77061	38,97	35–39
40–44	47	2.223	0,018	0,73933	47,30	40–44
45–49	31	1.166	0,018	0,72712	37,61	45–49
50–54	23	1.038	0,020	0,73403	45,13	50–54
55–59	16	449	0,022	0,66855	28,06	55–59
60–64	8	195	0,022	0,53719	24,37	60–64
15–64	868	33.149	0,019	0,72748	38,19	15–64

PROSPETTO N. 19.

Malattie dell'apparato circolatorio.

MASCHI E FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	118	3.082	0,003	0,08581	26,12	15–19
20–24	115	4.354	0,004	0,12055	37,86	20–24
25–29	196	4.986	0,005	0,16411	25,44	25–29
30–34	179	4.638	0,007	0,21939	21,91	30–34
35–39	128	3.858	0,008	0,28081	45,77	35–39
40–44	144	5.499	0,009	0,32986	38,19	40–44
45–49	93	3.730	0,010	0,39483	40,11	45–49
50–54	104	3.229	0,013	0,50969	31,05	50–54
55–59	92	4.176	0,017	0,70217	45,39	55–59
60–64	80	3.547	0,021	0,94110	44,34	60–64
15–64	1.249	43.099	0,006	0,22577	34,51	15–64

PROSPETTO N. 19-*a*.

MASCHI.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	97	2.460	0,004	0,08937	25,36	15–19
20–24	123	3.116	0,005	0,12821	25,33	20–24
25–29	169	3.883	0,006	0,17635	22,98	25–29
30–34	156	4.044	0,007	0,23545	25,92	30–34
35–39	100	4.704	0,008	0,29812	47,04	35–39
40–44	120	4.422	0,009	0,34669	36,85	40–44
45–49	86	3.346	0,011	0,41331	38,91	45–49
50–54	91	2.860	0,014	0,52746	31,43	50–54
55–59	83	3.880	0,017	0,71648	46,75	55–59
60–64	74	3.224	0,022	0,94656	43,57	60–64
15–64	1.099	35.939	0,008	0,24701	32,70	15–64

PROSPETTO N. 19-*b*.

FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	21	622	0,002	0,07415	29,62	15–19
20–24	32	1.238	0,003	0,09765	38,69	20–24
25–29	27	1.103	0,003	0,12711	40,85	25–29
30–34	23	594	0,004	0,16879	25,83	30–34
35–39	28	1.154	0,005	0,21984	41,21	35–39
40–44	24	1.077	0,006	0,26060	44,87	40–44
45–49	7	384	0,008	0,29531	52,71	45–49
50–54	13	369	0,010	0,39405	28,38	50–54
55–59	9	296	0,014	0,59573	32,89	55–59
60–64	6	323	0,017	0,88981	53,83	60–64
15–64	190	7.160	0,004	0,15713	37,68	15–64

Prospetto N. 20.

Malattie dell'apparato digerente.

Maschi e Femmine

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	879	15.772	0,024	0,43915	17,94	15–19
20–24	1.449	30.478	0,036	0,73207	21,03	20–24
25–29	1.558	30.991	0,045	0,94158	19,89	25–29
30–34	1.300	29.563	0,048	1,05318	22,74	30–34
35–39	519	20.286	0,047	1,07136	22,07	35–39
40–44	608	15.334	0,042	1,05505	25,22	40–44
45–49	437	11.737	0,038	1.02787	26,86	45–49
50–54	270	8.115	0,035	1,01397	30,06	50–54
55–59	179	5.737	0,034	1,03267	32,05	55–59
60–60	133	4.051	0,035	1,07482	30,46	60–64
15–64	7.732	172.064	0,040	0,90061	22,25	15–64

Prospetto N. 20-*a*.

Maschi.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	z
15–19	586	10.196	0,021	0,37040	17,40	15–19
20–24	971	19.255	0.035	0,67891	19,83	20–24
25–29	1.166	22.330	0,045	0,90333	19,15	25–29
30–34	1.034	22.926	0 049	1,02748	21,30	30–34
35–39	718	15.081	0,048	1,05885	21,00	35–39
40–44	480	12.093	0,043	1,04517	25,19	40–44
45–49	366	10.034	0,038	1,02184	27,42	45–49
50–54	222	6.377	0,935	1,00516	28,73	50–54
55–59	168	5.343	0,034	1,03717	31,80	55–59
60–64	123	3.742	0,036	1,09865	30,42	60–64
15–64	5.834	126.477	0,040	0,86928	21,68	15–64

Prospetto N. 20-*b*.

Femmine.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	293	5.576	0,035	0,66476	19,03	15–19
20–24	478	11.223	0,040	0,88689	23,48	20–24
25–29	392	8.661	0,043	1,04591	22,09	25–29
30–34	266	7.537	0,044	1,12536	28,33	30–34
35–39	201	5.205	0,043	1,10432	25,90	35–39
40–44	128	3.241	0,047	1,10187	25,32	40–44
45–49	71	1.703	0,037	1,06020	23,99	45–49
50–54	48	1.738	0,039	1,04827	36,21	50–54
55–59	11	394	0,030	0,95385	35,82	55–59
60–64	10	309	0,028	0,85124	30,90	60–64
15–64	1.898	45.587	0,042	1,00044	24,02	15–64

PROSPETTO N. 21.

Malattie dell'apparato uro-genitale.

MASCHI E FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	78	2.519	0.002	0,07014	32,29	15–19
20–24	182	6.679	0,004	0,15406	36,70	20–24
25–29	230	7.587	0,006	0,21954	32,99	25–29
30–34	188	6.442	0,007	0,25498	34,27	30–34
35–39	151	5.847	0,007	0,26647	38,72	35–39
40–44	112	3,714	0,007	0,26222	33,16	40–44
45–49	67	2.483	0,007	0,26244	37,06	45–49
50–54	67	2.413	0,007	0,28613	36,01	50–54
55–59	43	1.746	0,008	0,33684	40,60	55–59
60–64	31	1.530	0,008	0,40594	49,35	60–64
15–64	1.149	40.960	0.006	0,21438	35,65	15–64

PROSPETTO N. 21-*a*.

MASCHI.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	51	1.622	0,002	0,05892	31,80	15–19
20–24	99	2.703	0,004	0,09733	27,30	20–24
25–29	113	2.950	0,005	0,13269	26,11	25–29
30–34	96	3.203	0,005	0,15588	33,36	30–34
35–39	79	2.936	0,005	0,16645	37,16	35–39
40–44	57	1.556	0,005	0.17369	27,30	40–44
45–49	42	1.484	0,006	0,20014	35,33	45–49
50–54	58	1.908	0,007	0,25699	32,90	50–54
55–59	39	1.625	0,008	0,33812	41,67	55–59
60–64	29	1.465	0,999	0,43012	50,52	60–64
15–64	663	21.452	0,005	0,14744	32,36	15–64

PROSPETTO N. 21-*b*.

FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	27	897	0,003	0,10694	33,22	15–19
20–24	83	3.976	0,008	0,30782	47,90	20–24
25–29	117	4.637	0,012	0,46452	39,63	25–29
30–34	92	3.239	0,014	0,55866	35,21	30–34
35–39	72	2.911	0,015	0,60565	40,43	35–39
40–44	55	2.158	0,014	0,59481	39.24	40–44
45–49	25	999	0,012	0,51778	39,96	45–49
50–54	9	505	0,009	0,40099	56,11	50–54
55–59	4	121	0,007	0,27917	30,25	55–59
60–64	2	65	0,005	0,17906	34,53	60–64
15–64	486	19.508	0,011	0,42812	40,14	15–64

Prospetto N. 22.

Gravidanza.

Femmine.

x	cx	nx	fx	zx	δx	x
15–19	14	513	0,0017	0,06116	36,64	15–19
20–24	82	3.973	0,0084	0,42738	48,45	20–24
25–29	158	8.879	0,0130	0,67593	56,20	25–29
30–34	105	4.925	0,0136	0,68986	46,90	30–34
35–39	48	2.562	0,0105	0,53101	53,38	35–39
40–44	14	615	0,0060	0,28648	43,93	40–44
45–49	1	10	0,0027	0,11901	10 —	45–49
50–54	1	29	0,0009	0,02491	29 —	50–54
55–59	—	—	—	—	—	55–59
60–64	—	—	—	—	—	60–64
15–64	423	21.506	0,0093	0,47196	50,84	15–64

PROSPETTO N. 23.

Malattie della pelle e dei muscoli.

MASCHI E FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	484	8.881	0,013	0,24728	18,35	15–19
20–24	606	11.865	0 017	0,33678	19,58	20–24
25–29	690	14.771	0,030	0,41924	21,41	25–29
30–34	561	11.399	0,032	0,48362	19,37	30–34
35–39	444	10.866	0,033	0,53921	24,47	35–39
40–44	353	8.877	0,032	0,56423	25,15	40–44
45–49	240	6.371	0,031	0,55972	26,55	45–49
50–54	155	4.518	0,030	0,54988	29,15	50–54
55–59	116	2.669	0,019	0,57824	23,09	55–59
60–64	93	2.468	0,017	0,65482	26,54	60–64
15–64	3.742	82.685	0,020	0,43276	22,10	15–64

PROSPETTO N. 23-*a*.

MASCHI.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	386	6.724	0,014	0,24427	17,42	15–19
20–24	470	8.953	0,019	0,35381	19,05	20–24
25–29	569	11.542	0,022	0,45141	20,28	25–29
30–34	482	9.456	0,024	0,52620	19,62	30–34
35–39	377	9.131	0,025	0,58774	32,96	35–39
40–44	299	7.592	0,024	0,61167	25,39	40–44
45–49	213	5.720	0,023	0,60127	26,85	45–49
50–54	136	4.013	0,022	0,58435	29,51	50–54
55–59	111	2.568	0,023	0,61315	23,14	55–59
60–54	89	2.368	0,026	0,69524	26,61	60–64
15–64	3.132	68.067	0,022	0,46782	21,73	15–64

PROSPETTO N. 23-*b*.

FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	98	2.157	0,012	0,25715	22,01	15–19
20–24	136	2.912	0,013	0,29277	21,41	20–24
25–29	121	3.229	0,014	0,32791	26,69	25–29
30–34	79	1.943	0,014	0,35116	24,59	30–34
35–39	67	1.735	0,015	0,37065	25,90	35–39
40–44	54	1.285	0,015	0,38071	23,80	40–44
45–49	27	651	0,015	0,36262	24,11	45–49
50–54	19	505	0,014	0,33318	26,58	50–54
55–59	5	101	0,012	0,29409	20,20	55–59
60–64	4	100	0,011	0,27548	25 —	60–64
15–64	610	14.618	0,013	0,32080	23,96	15–64

Prospetto N. 25.

Malattie da causa violenta.

Maschi e Femmine.

x	cx	nx	fx	zx	δx	x
15–19	643	12.278	0,018	0,34186	19,09	15–19
20–24	846	15.234	0,023	0,44003	18,08	20–24
25–29	982	18.796	0,028	0,53706	19,14	25–29
30–34	741	14.167	0,030	0,61248	19,12	30–34
35–39	650	14.273	0,032	0,69730	21,96	35–39
40–44	489	10.726	0,031	0,74531	21,93	40–44
45–49	328	9.555	0,031	0,79404	29,13	45–49
50–54	241	6.269	0,031	0,82808	26,01	50–54
55–59	176	4.957	0,034	0,91507	56,33	55–59
60–64	147	3.912	0,039	1,03794	26,61	60–64
15–64	5.243	110.167	0,027	0,57660	21,01	15–64

Prospetto N. 25-*a*

Maschi.

x	cx	nx	fx	zx	δx	x
15–19	551	10.339	0,020	0,37559	18,76	15–19
20–24	718	12.840	0,027	0,50819	17,88	20–24
25–29	871	16.242	0,033	0,62990	18,65	25–29
30–34	646	12.251	0,036	0,70990	18,96	30–34
35–39	584	12.993	0,037	0,78914	22,25	35–39
40–44	430	9.024	0,035	0,81310	20,99	40–44
45–49	282	8.223	0,033	0,82622	29,16	45–49
50–54	217	5.567	0,032	0,82597	25,65	50–54
55–59	152	3.908	0,034	0,89969	25,71	55–59
60–64	136	3.521	0,040	1,03376	25,89	60–64
15–64	4.587	94.908	0,032	0,65230	20,69	15–64

Prospetto N. 25-*b*.

Femmine.

x	cx	nx	fx	zx	δx	x
15–19	92	1.939	0,011	0,23116	21,08	15–19
20–24	128	2.394	0,012	0,25271	18,70	20–24
25–29	111	2.554	0,013	0,27586	25,10	25–29
30–34	95	1.916	0,014	0,31829	20,17	30–34
35–39	66	1.280	0,016	0,39560	19,39	35–39
40–44	59	1.702	0,019	0,49992	28,85	40–44
45–49	46	1.332	0,023	0,71014	28,96	45–49
50–54	24	702	0,026	0,91654	29,25	50–54
55–59	24	1.049	0,029	1,07106	43,71	55–59
60–64	11	391	0,030	1,07713	35,55	60–64
15–64	656	15.259	0,014	0,33487	23,26	15–64

PROSPETTO N. 26.

Malattie da cause non specificate o mal definite.

MASCHI E FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	270	5.210	0,008	0,14506	19,30	15–19
20–24	346	6.772	0,010	0,17998	19,57	20–24
25–29	346	6.154	0,011	0,21001	17,79	25–29
30–34	309	6.835	0,011	0,23111	22,12	30–34
35–39	187	4.610	0,010	0,22834	24,65	35–39
40–44	123	3.043	0,008	0,20910	24,74	40–44
45–49	82	2.008	0,007	0,18957	24,49	45–49
50–54	58	1.455	0,007	0,18608	25,09	50–54
55–59	44	1.235	0,008	0,20610	28,07	55–59
60–64	35	895	0,009	0,23746	25,57	60–64
15–64	1.800	38.217	0,009	0,20002	21,23	15–64

PROSPETTO N. 26-*a*.

MASCHI.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	177	3.399	0,006	0,12348	19,20	15–19
20–24	231	3.863	0,004	0,15697	16,72	20–24
25–29	247	4.163	0,010	0,18943	16,85	25–29
30–34	231	4.735	0,011	0,21330	20,50	30–34
35–39	144	3.469	0,010	0,21746	24,09	35–39
40–44	95	2.179	0,009	0,20370	22,94	40–44
45–49	72	1.775	0,008	0,19145	24,65	45–49
50–54	49	1.151	0,008	0,19223	23,49	50–54
55–59	39	1.085	0,009	0,21811	27,82	55–59
60–64	33	876	0,010	0,25719	26,55	60–64
15–64	1.318	26.695	0,009	0,18347	20,25	15–64

PROSPETTO N. 26-*b*.

FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	93	1.811	0,011	0,21590	19,47	15–19
20–24	115	2.909	0,011	0,24540	25,30	20–24
25–29	99	1.991	0,011	0,26625	20,11	25–29
30–34	78	2.100	0,011	0,28351	26,92	30–34
35–39	43	1.141	0,010	0,26181	26,53	35–39
40–44	28	864	0,009	0,24144	30,86	40–44
45–49	10	233	0,007	0,21466	23,30	45–49
50–54	9	304	0,007	0,20437	33,78	50–54
55–59	5	150	0,006	0,14937	30 —	55–59
60–64	2	19	0,005	0,05234	9,50	60–64
15–64	482	11.522	0,011	0,25286	23,90	15–64

Diagrammi dei coefficienti di morbilità secondo i grandi gruppi di malattie.

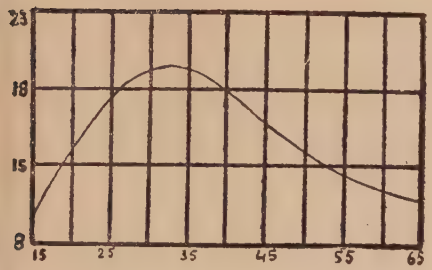


FIG. 4. — Malattie infettive e parassitarie.

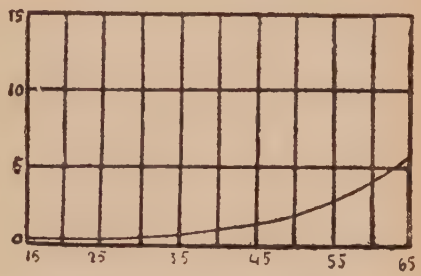


FIG. 5. — Tumori e granulomi.

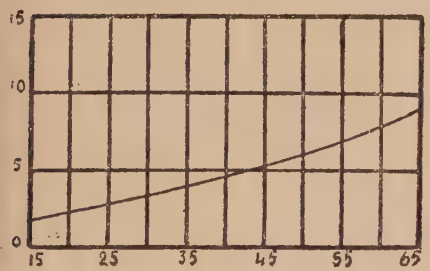


FIG. 6. — Malattie reumatiche, della nutrizione, delle glandole a secrezione interna ed altre malattie generali.

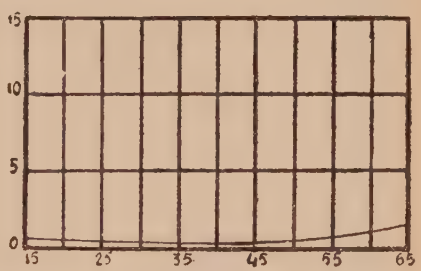


FIG. 7. — Malattie del sangue e degli organi emopoietici.

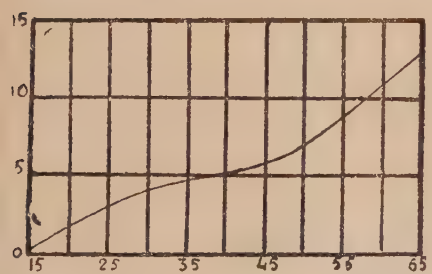


FIG. 8. — Malattie mentali, del sistema nervoso e degli organi dei sensi.

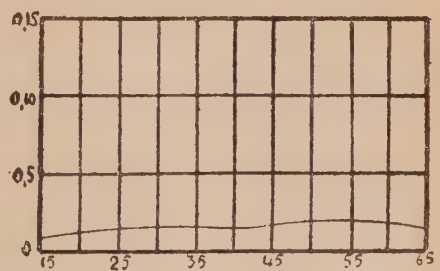


FIG. 9. — Avvelenamenti. Intossicazioni. Anafilassi.

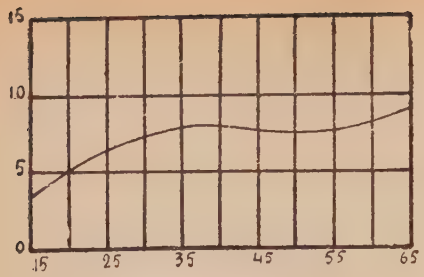


FIG. 10. — Malattie dell'apparato respiratorio.

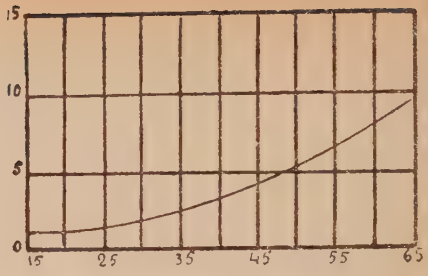


FIG. 11. — Malattie dell'apparato circolatorio e linfatico.

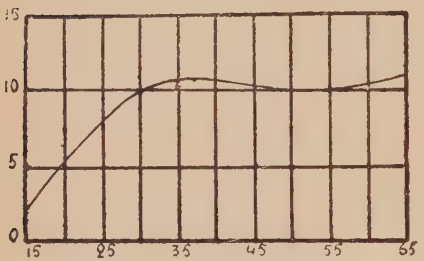


FIG. 12. — Malattie dell'apparato digerente.

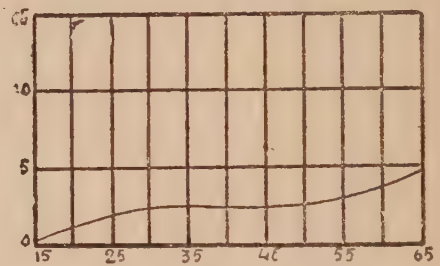


FIG. 13. — Malattie dell'apparato uro-genitale.

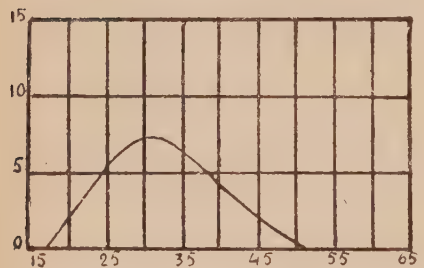


FIG. 14. — Gravidanza. Malattie della gravidanza. Parto. Stati puerperali.

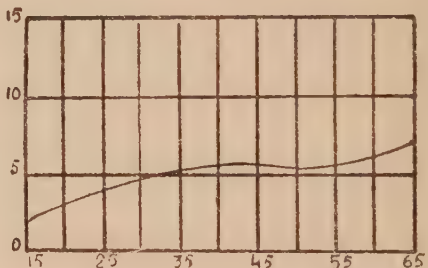


FIG. 15. — Malattie della pelle, del cellulare, dei muscoli, delle ossa e delle articolazioni.

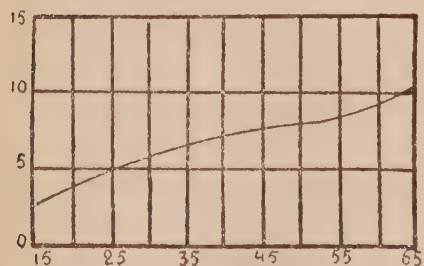


FIG. 16. — Malattie da causa violenta.

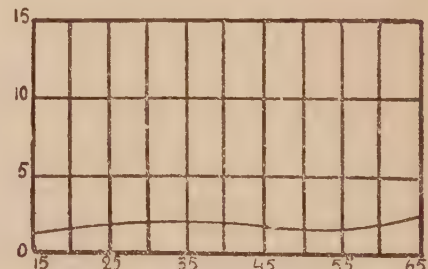


FIG. 17. — Malattie da cause non specificate o mal definite.

N. 3. — La tubercolosi polmonare e le altre forme di tubercolosi come cause perturbatrici della misura di alcuni coefficienti di morbilità.

1. — Nel corso della « Relazione « (vedi « Esame sintetico, ecc. . .»), abbiamo accennato alle perturbazioni apportate, alla serie dei coefficienti di morbilità, dalle forme tubercolari (Tbc. polmonare ed altre forme di tubercolosi).

Allo scopo di determinare, quindi, il peso effettivo che, in dipendenza di tali perturbazioni, viene a gravare sui coefficienti generali di morbilità, abbiamo proceduto alla interpolazione — secondo il sistema usato per il calcolo delle classi annuali di esposti al rischio, casi e giornate di malattie relativamente a tutte le osservazioni — dei casi e delle giornate di malattia rilevate per Tbc, calcolando, successivamente, i relativi coefficienti di morbilità e la frequenza delle malattie (vedi al proposito i prospetti seguenti, n° 27, 27-a, 27-b, e la figura n° 18).

PROSPETTO N. 27.

Coefficienti di morbilità e frequenza delle malattie per tubercolosi secondo il sesso e le età.

MASCHI E FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15	9,30	1.043	0,00292	0,32716	112,15	15
16	25,53	2.993	0,00419	0,49146	117,23	16
17	42,01	4.684	0,00531	0,59209	111,50	17
18	57,37	6.112	0,00638	0,67926	106,54	18
19	71,79	7.367	0,00738	0,75730	102,62	19
15–19	206 —	22.199	0,00574	0,61810	107,76	15-19
20	66,87	6.994	0,00913	0,95455	104,59	20
21	68,03	6.948	0,01031	1,05321	109,13	21
22	66,07	6.631	0,01137	1,14170	100,36	22
23	78,95	8.025	0,01096	1,11396	101,65	23
24	81,08	8.378	0,01469	1,11395	103,33	24
20-24	361 —	36.976	0,01048	1,07310	102,43	20-24
25	74,92	7.848	0,01040	1,08939	104,75	25
26	71,83	7.417	0,01089	1,07962	103,26	26
27	68,57	6.963	0,01049	1,06517	101,55	27
28	65,68	6.542	0,01055	1,05059	99,60	28
29	63 —	6.153	0,01061	1,03673	97,66	29
25-29	344 —	34.923	0,01050	1,06560	101,52	25-29
30	59,99	5.745	0,01064	1,01898	95,77	30
31	56,72	5.304	0,01062	0,99326	95,51	31
32	53,20	4.911	0,01055	0,97382	92,31	32
33	49,44	4.606	0,01041	0,97030	93,16	33
34	45,65	4.364	0,01023	0,97804	95,60	34
30-34	265 —	24.930	0,01050	0,98811	94,08	30-34
35	41,91	4.109	0,01001	0,98137	98,04	35
36	37,88	3.844	0,00969	0,98362	101,48	36
37	34,67	3.641	0,00943	0,99021	105,02	37
38	32,82	3.519	0,00933	1,00085	107,22	38
39	31,72	3.431	0,00933	1,00971	108,16	39
35-39	179 —	18.544	0,00958	0,99240	103,60	35-39

Segue PROSPETTO N. 27.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
40	30,45	3.337	0,00929	1,01831	109,59	40
41	29,64	3.301	0,00933	1,03870	111,37	41
42	27,93	3.132	0,00914	1,02487	112,14	42
43	24,59	2.733	0,00852	0,94666	111,14	43
44	20,39	2.216	0,00758	0,82410	108,68	44
40-44	133 —	14.719	0,00882	0,97561	110,67	40-44
45	16,70	1.758	0,00665	0,70012	105,27	45
46	12,87	1.261	0,00551	0,54027	97,98	46
47	9,90	903	0,00455	0,41498	91,21	47
48	8,46	798	0,00411	0,38813	94,33	48
49	8,07	848	0,00412	0,43287	105,08	49
45-49	56 —	5.568	0,00507	0,50453	99,43	45-49
50	7,67	861	0,00413	0,46340	112,26	50
51	7,06	900	0,00399	0,50963	127,48	51
52	6,78	924	0,00406	0,55330	136,28	52
53	6,50	878	0,00415	0,56022	135,08	53
54	5,99	785	0,00412	0,54026	131,05	54
50-54	34 —	4.348	0,00409	0,52310	127,88	50-54
55	5,93	718	0,00440	0,53225	121,08	55
56	5,87	664	0,00470	0,53162	113,12	56
57	5,65	605	0,00489	0,52381	107,08	57
58	5,14	539	0,00483	0,50610	104,86	58
59	4,41	466	0,00450	0,47502	105,67	59
55-59	27 —	2.992	0,00466	0,51595	110,81	55-59
60	3,55	389	0,00428	0,45111	105,45	60
61	3,35	357	0,00444	0,45499	102,47	61
62	2,49	271	0,00373	0,38503	103,23	62
63	0,61	103	0,00137	0,17768	130,11	63
64	—	—	—	—	—	64
60-64	10 —	1.120	0,00265	0,29716	112 —	60-64
	1.615	166.319	0,00845	0,87049	102,98	

PROSPENTO N. 27-*a*.

Coefficienti di morbilità e frequenza delle malattie per tubercolosi, secondo il sesso e le età.

MASCHI.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15	3,41	652	0,00177	0,33888	180 —	15
16	13,31	1.839	0,00290	0,40127	138,17	16
17	24,34	2.871	0,00293	0,46329	117,95	17
18	35,12	3.744	0.00494	0,52636	106,60	18
19	45,82	4.547	0,00594	0,58975	99,24	19
15-19	122 —	13.653	0,00443	0,49599	111,91	15-19
20	37,89	3.806	0,00728	0,73122	100,45	20
21	36,55	3.458	0,00832	0,78734	94,61	21
22	33,52	3.004	0,00936	0,83887	89,62	22
23	47,07	4.462	0,00936	0,88743	94,79	23
24	50,97	5.009	0,00936	0,92010	98,27	24
20-24	206 —	19.739	0,00871	0,83463	95,82	20-24
25	46,74	4.693	0.00893	0,89715	100,41	25
26	46,25	4.546	0,00920	0,90414	98,29	26
27	45,58	4.397	0,00944	0,91111	96,47	27
28	44,73	4.249	0,00967	0,91870	94,99	28
29	43,70	4.099	0,00987	0,92633	93,80	29
25-29	227 —	21.984	0,00940	0,91088	96,84	25-29
30	42,58	3.953	0.01007	0,93452	92,83	30
31	41,41	3.814	0,00943	0,94313	92,10	31
32	39,84	3.662	0,01036	0,95216	91,92	32
33	37,76	3.491	0,01040	0,96197	92,45	33
34	35,41	3.315	0,01040	0,97328	93,62	34
30-34	197 —	18.235	0,01028	0,95197	92,56	30-34
35	33,06	3.136	0,01034	0,98123	94,86	35
36	30,41	2.930	0,01021	0,98355	96,35	36
37	28,26	2.792	0,01008	0,99608	98,80	37
38	27,02	2.766	0,01004	1,02825	102,37	38
39	26,25	2.788	0,01004	1,06616	106,21	39
35-39	145 —	14.412	0,01052	1,00903	99,39	35-39

Segue PROSPETTO N. 27-*a*.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
40	25,31	2.787	0,09980	1,09897	110,11	40
41	24,69	2.840	0,09988	1,14887	115,03	41
42	23,20	2.737	0,09690	1,14327	117,97	42
43	20,25	2.371	0,00886	1,03809	117,09	43
44	16,55	1.869	0,00768	0,86769	112,93	44
40–44	110 —	12.604	0,00929	1,06453	114,58	40–44
45	13,27	1.426	0,00651	0,69971	107,47	45
46	9,74	931	0,00565	0,48414	95,58	46
47	7,17	594	0,00394	0,32673	82,84	47
48	6,31	543	0,00364	0,31351	86,05	48
49	6,51	666	0,00393	0,40169	102,30	49
45–49	43 —	4.160	0,00469	0,45370	96,74	45–49
50	6,65	740	0,00421	0,46806	111,28	50
51	6,62	844	0,00439	0,55931	127,49	51
52	6,70	909	0,00467	0,63389	135,67	52
53	6,39	865	0,00472	0,63885	135,37	53
54	5,64	751	0,00444	0,59134	133,15	54
50–54	32 —	4.109	0,00448	0,57485	128,40	50–54
55	5,40	668	0,00454	0,56134	123,70	55
56	5,09	593	0,00458	0,53375	116,50	56
57	4,70	518	0,00454	0,50048	110,21	57
58	4,20	449	0,00437	0,46771	106,90	58
59	3,61	384	0,00406	0,43243	106,37	59
55–59	23 —	2.612	0,00444	0,50386	113,56	55–59
60	2,89	294	0,00357	0,35986	101,73	60
61	2,66	264	0,00356	0,35294	99,25	61
62	1,95	172	0,002868	0,25294	88,21	62
63	0,50	30	0,00082	0,04894	60 —	63
64	—	—	—	—	—	64
60–64	8 —	760	0,00235	0,22313	95 —	60–64
	1.113	112.268	0,007761	0,77162	100,87	

PROSPETTO N. *27-b.*

Coefficienti di morbilità e frequenza delle malattie per tubercolosi, secondo il sesso e le età.

FEMMINE.

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15	5,89	391	0,30933	0,00465	66,38	15
16	12,22	1.154	0,76576	0,00810	94,44	16
17	17,67	1.813	1,05776	0,01031	102,60	17
18	22,25	2.368	1,25623	0,01180	106,43	18
19	25,97	2.820	1,34742	0,01287	108,59	19
15–19	84 —	8.546	1,01836	0,01004	101,74	15–19
20	28,98	3.188	1,50235	0,01366	40,01	20
21	31,48	3.490	1,58276	0,01428	110,86	21
22	32,55	3.627	1,62865	0,01462	111,43	22
23	31,88	3.563	1,63741	0,01465	111,76	23
24	30,11	3.369	1,62205	0,01450	111,89	24
20–24	155 —	17.237	1,59498	0,01434	41,21	20–24
25	28,18	3.155	1,59909	0,01428	111,21	25
26	25,58	2.871	1,55863	0,01389	112,24	26
27	22,99	2.566	1,49971	0,01344	111,61	27
28	20,95	2.293	1,43133	0,01308	109,45	28
29	19,30	2.054	1,36026	0,01278	106,42	29
25–29	117 —	12.939	1,49791	0,01354	110,59	25–29
30	17,41	1.792	1,27272	0,01236	102,93	30
31	15,31	1.490	1,14969	0,01181	97,32	31
32	13,36	1.249	1,04344	0,01116	93,49	32
33	11,68	1.115	0,99732	0,01044	95,46	33
34	10,24	1.049	0,99337	0,09697	102,44	34
30–34	68 —	6.695	1,10206	0,01119	98,46	30–34
35	8,85	973	0,98184	0,00893	109,94	35
36	7,47	914	0,98385	0,00804	122,36	36
37	6,41	849	0,97139	0,00734	132,45	37
38	5,80	753	0,91162	0,00702	129,83	38
39	5,47	643	0,82120	0,00699	117,55	39
35–39	34 —	4.132	0,93845	0,00772	121,53	35–39

Segue PROSPETTO N. *27-b.*

x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
40	5,14	550	0,74224	0,00694	107 —	40
41	4,95	461	0,65297	0,00701	93,13	41
42	4,73	395	0,59668	0,00714	83,51	42
43	4,34	362	0,60033	0,00720	83,41	43
44	3,84	347	0,64860	0,00718	90,36	44
40–44	23 —	2.115	0,65137	0,00708	91,96	40–44
45	3,43	332	0,70190	0,00725	96,79	45
46	3,13	330	0,80292	0,00762	105,43	46
47	2,73	309	0,86313	0,00763	113,19	47
48	2,15	255	0,78704	0,00664	118,60	48
49	1,56	182	0,60465	0,00518	116,67	49
45–49	13 —	1.408	0,75415	0,00696	108,31	45–49
50	1,02	121	0,43682	0,00368	118,63	50
51	0,44	56	0,21790	0,00171	127,27	51
52	0,08	15	0,63559	0,00034	180 —	52
53	0,11	13	0,61611	0,00052	118,18	53
54	0,35	34	0,18579	0,00191	97,14	54
50–54	2 —	239	0,20533	0,00172	119,50	50–54
55	0,53	50	0,31446	0,00333	94,34	55
56	0,78	71	0,51449	0,00565	91,03	56
57	0,95	87	0,72500	0,00792	91,58	57
58	0,94	90	0,85714	0,00895	95,74	58
59	0,80	82	0,88172	0,00860	102,50	59
55–59	4 —	380	0,61789	0,00650	95 —	55–59
60	0,65	96	0,95181	0,00867	109,72	60
61	0,68	94	1,04054	0,01014	102,67	61
62	0,53	89	1,07353	0,00882	121,67	62
63	0,14	82	1,00000	0,00294	180 —	63
64	—	—	—	—	—	64
60–64	2 —	361	0,99174	0,00551	180 —	60–64
	502	54.052	0,01102	1,18620	107,67	

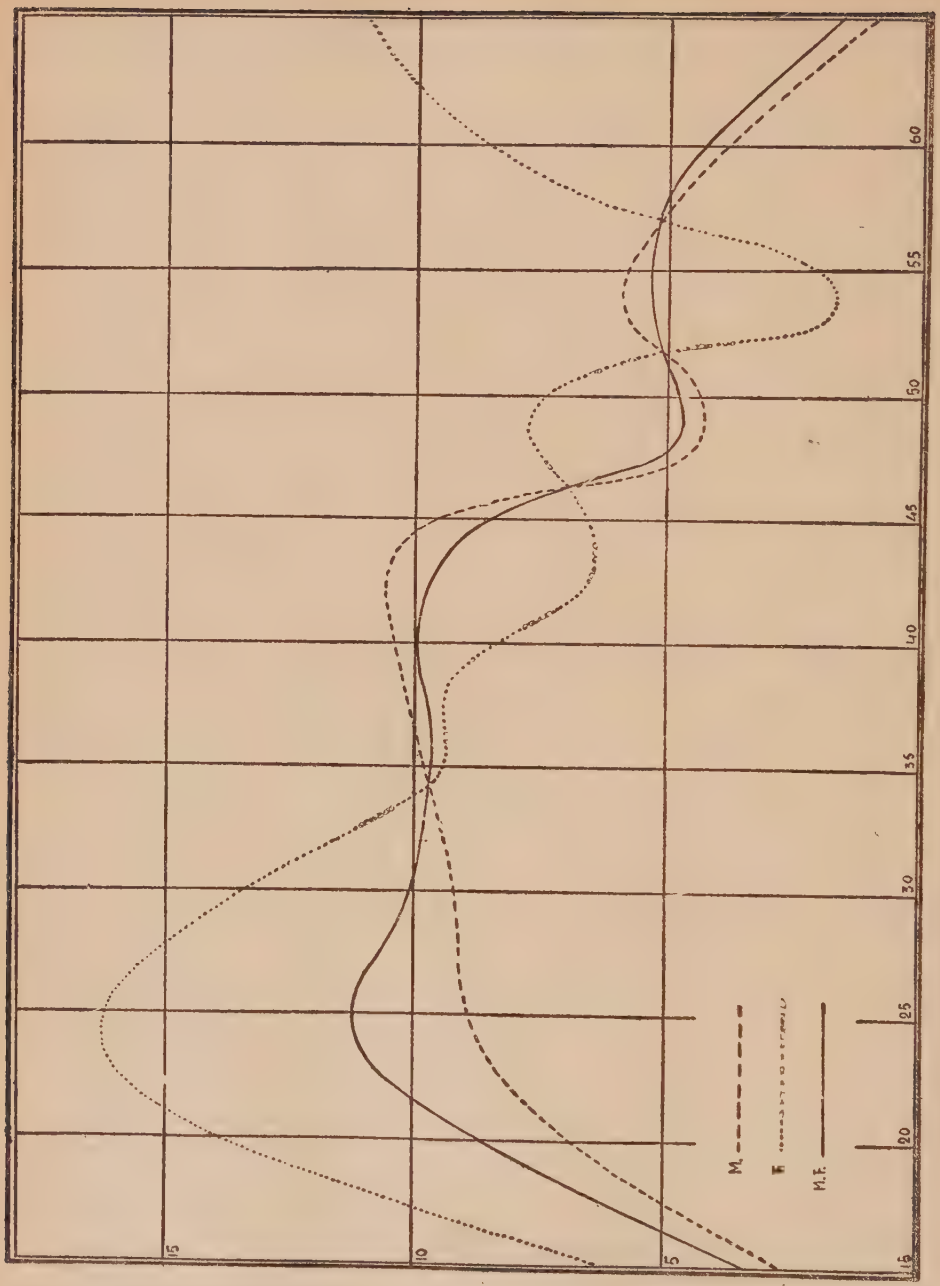


FIG. 18 — Coefficienti di morbilità per tubercolosi dell'apparato respiratorio ed altre forme di tubercolosi.

2. — Dalla figura n° 18 risulta, ancora più chiaramente che non dalle tavole statistiche precedentemente indicate, l'andamento particolarissimo dei coefficienti di morbilità per tubercolosi: andamento che, ove si consideri il complesso delle osservazioni (maschi e femmine insieme), si riavvicina singolarmente a quello della curva dei coefficienti di mortalità per Tbc.

La notevole depressione che si nota a partire dalle età comprese nel quinquennio 40-45 anni e la elevata misura delle giornate di malattia indennizzate dalla Cassa per Tbc., sono le cause che — come abbiamo anche osservato in altra parte di questa memoria — influiscono, anzi determinano l'anormale andamento dei coefficienti generali di morbilità.

Depurando, infatti, questi ultimi, dei coefficienti per Tbc., e perequando ulteriormente con metodo grafico i coefficienti residuali (vedi prosp. n° 28 e fig. n° 19), otteniamo una serie di coefficienti ad andamento regolare e crescente, con progressione uniforme, con l'avanzare delle età.

PROSPETTO N. 28.

Coefficienti di morbilità senza tubercolosi.

MASCHI E FEMMINE.

Età	Coefficienti di morbilità	Età	Coefficienti di morbilità	Età	Coefficienti di morbilità	Età	Coefficienti di morbilità	Età	Coefficienti di morbilità
15	3,94	25	4,53	35	5,49	45	6,43	55	7,35
16	3,98	26	4,61	36	5,59	46	6,52	56	7,44
17	4,02	27	4,70	37	5,69	47	6,61	57	7,54
18	4,07	28	4,80	38	5,78	48	6,70	58	7,64
19	4,12	29	4,90	39	5,87	49	6,80	59	7,74
25–19	4,02	25–29	4,58	35–39	5,70	45–49	6,53	55–59	7,54
20	4,18	30	5,00	40	5,97	50	6,89	60	7,83
21	4,23	31	5,10	41	6,06	51	6,99	61	7,92
22	4,30	32	5,20	42	6,16	52	7,08	62	8,01
23	4,37	33	5,30	43	6,25	53	7,16	63	8,10
24	4,44	34	5,40	44	6,34	54	7,25	64	8,19
20–24	4,31	30–34	5,26	40–44	6,16	50–54	7,09	60–64	8,01

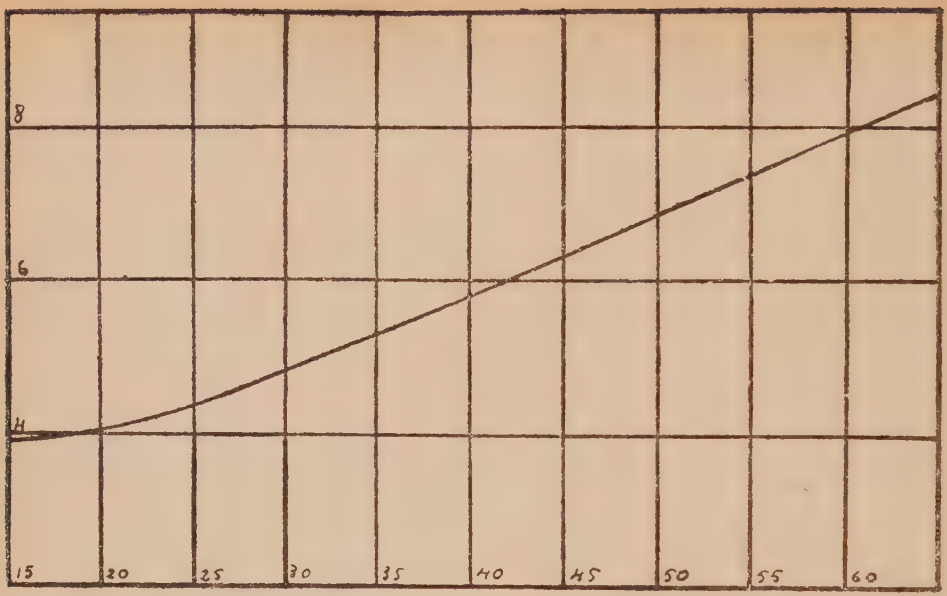


Fig. 19. — Coefficienti di morbilità senza tubercolosi.

N. 4. — Determinazione del coefficiente di morbilità e della frequenza delle malattie giornalieri.

1. — Per esaminare l'andamento del rischio di malattia e la probabilità di ammalarsi in ogni giorno dell'anno, sono stati calcolati, avvalendoci della rilevazione dei casi e delle giornate di malattia liquidati giornalmente e del numero degli esposti al rischio, i coefficienti di morbilità e la frequenza, in ogni giornata, di malattia.

I dati così elaborati, sulla scorta della indagine diretta, come è naturale, a causa anche della esiguità delle osservazioni, presentavano, all'atto pratico, notevoli discrepanze ed un andamento non completamente uniforme e corrispondente alla presumibile distribuzione del rischio.

Pertanto, si è ritenuto concetto opportuno di procedere ad una perequazione dei coefficienti grezzi determinati mediante indagine diretta, raggruppandoli in classi di dieci ed attribuendo la rispettiva media al centro della decade.

Tra questi coefficienti equidistanti, si sono poi interpolati, con procedimento grafico, i coefficienti relativi ai giorni intermedi.

Uguale procedimento si è utilizzato per la determinazione della frequenza giornaliera di malattia.

***

2. — Nei prospetti nn. 29 e 30 e nelle figure 20 e 21, è riportato, analiticamente, il risultato della nostra indagine, la quale vuole rappresentare un primo contributo per il calcolo dei coefficienti di morbilità e della frequenza delle malattie attraverso l'indagine sistematica dell'andamento degli elementi che compongono gli indici misuratori del fenomeno malattia.

PROSPETTO N. 29.

Coefficienti giornalieri di morbilità.

GIORNO	GENNAIO	FEBBRAIO	MARZO	APRILE	MAGGIO	GIUGNO	LUGLIO	AGOSTO	SETTEMBRE	OTTOBRE	NOVEMBRE	DICEMBRE	COEFFIC. DI MORBILITÀ GENERALE
1	0,013.59	0,017.46	0,018.88	0,016.47	0,014.66	0,015.14	0,016.23	0,017.41	0,017.05	0,016.48	0,015.90	0,015.24	—
2	0,013.71	0,017.61	0,018.86	0,016.34	0,014.67	0,015.17	0,016.27	0,017.44	0,016.99	0,016.47	0,015.88	0,015.22	—
3	0,013.84	0,017.74	0,018.84	0,016.21	0,014.68	0,015.19	0,016.33	0,017.48	0,016.94	0,016.46	0,015.86	0,015.18	—
4	0,013.97	0,017.87	0,018.82	0,016.07	0,014.69	0,015.21	0,016.36	0,017.51	0,016.89	0,016.44	0,015.84	0,015.16	—
5	0,014.09	0,018.01	0,018.80	0,015.94	0,014.69	0,015.24	0,016.42	0,017.54	0,016.84	0,016.42	0,015.82	0,015.14	—
6	0,014.22	0,018.15	0,018.78	0,015.81	0,014.70	0,015.27	0,016.46	0,017.57	0,016.81	0,016.40	0,015.80	0,015.11	—
7	0,014.36	0,018.27	0,018.76	0,015.67	0,014.70	0,015.30	0,016.51	0,017.61	0,016.79	0,016.39	0,015.78	0,015.08	—
8	0,014.48	0,018.39	0,018.74	0,015.54	0,014.71	0,015.34	0,016.55	0,017.64	0,016.78	0,016.37	0,015.76	0,015.07	—
9	0,014.61	0,018.51	0,018.71	0,015.41	0,014.71	0,015.37	0,016.61	0,017.66	0,016.76	0,016.36	0,015.74	0,015.06	—
10	0,014.73	0,018.64	0,018.70	0,015.27	0,014.72	0,015.39	0,016.65	0,017.69	0,016.74	0,016.35	0,015.71	0,015.04	—
11	0,014.86	0,018.77	0,018.69	0,015.14	0,014.72	0,015.40	0,016.71	0,017.71	0,016.71	0,016.34	0,015.68	0,015.00	—
12	0,014.99	0,018.89	0,018.67	0,015.01	0,014.73	0,015.42	0,016.75	0,017.75	0,016.70	0,016.32	0,015.66	0,014.98	—
13	0,015.12	0,019.01	0,018.64	0,014.87	0,014.73	0,015.44	0,016.80	0,017.79	0,016.69	0,016.31	0,015.64	0,014.96	—
14	0,015.24	0,019.11	0,018.62	0,014.76	0,014.74	0,015.47	0,016.83	0,017.81	0,016.68	0,016.30	0,015.61	0,014.94	—
15	0,015.37	0,019.15	0,018.60	0,014.61	0,014.73	0,015.49	0,016.85	0,017.81	0,016.66	0,016.28	0,015.58	0,015.90	—
16	0,015.54	0,019.14	0,018.57	0,014.56	0,014.75	0,015.53	0,016.89	0,017.82	0,016.66	0,016.27	0,015.57	0,014.89	—
17	0,015.62	0,019.12	0,018.47	0,014.53	0,014.76	0,015.57	0,016.93	0,017.79	0,016.65	0,016.24	0,015.54	0,014.86	—
18	0,015.74	0,019.09	0,018.33	0,014.55	0,014.78	0,015.62	0,016.97	0,017.75	0,016.64	0,016.21	0,015.52	0,014.84	—
19	0,015.87	0,019.08	0,018.20	0,014.56	0,014.79	0,015.66	0,017.01	0,017.70	0,016.63	0,016.19	0,015.50	0,014.80	—
20	0,015.99	0,019.07	0,018.07	0,014.57	0,014.81	0,015.71	0,017.04	0,017.67	0,016.62	0,016.17	0,015.48	0,014.79	—
21	0,016.15	0,019.04	0,017.94	0,014.58	0,014.84	0,015.74	0,017.08	0,017.63	0,016.61	0,016.14	0,015.46	0,014.77	—
22	0,016.24	0,019.02	0,017.81	0,014.59	0,014.87	0,015.80	0,017.11	0,017.58	0,016.60	0,016.11	0,015.44	0,014.74	—
23	0,016.37	0,019.00	0,017.67	0,014.59	0,014.90	0,015.85	0,017.14	0,017.53	0,016.59	0,016.09	0,015.41	0,014.72	—
24	0,016.48	0,018.98	0,017.54	0,014.59	0,014.92	0,015.90	0,017.17	0,017.47	0,016.58	0,016.07	0,015.39	0,014.70	—
25	0,016.60	0,018.96	0,017.41	0,014.60	0,014.95	0,015.95	0,017.19	0,017.42	0,016.56	0,016.06	0,015.37	0,014.68	—
26	0,016.71	0,018.93	0,017.27	0,014.61	0,014.97	0,015.99	0,017.22	0,017.36	0,016.54	0,016.04	0,015.34	0,014.66	—
27	0,016.85	0,018.91	0,017.15	0,014.62	0,014.99	0,016.04	0,017.26	0,017.31	0,016.52	0,016.01	0,015.32	0,014.64	—
28	0,016.99	0,018.89	0,017.01	0,014.63	0,015.01	0,016.09	0,017.29	0,017.25	0,016.51	0,015.99	0,015.31	0,014.62	—
29	0,017.13	—	0,016.88	0,014.64	0,015.04	0,016.14	0,017.32	0,017.20	0,016.50	0,015.96	0,015.30	0,014.60	—
30	0,017.26	—	0,016.74	0,014.65	0,015.08	0,016.18	0,017.35	0,017.15	0,016.49	0,015.94	0,015.28	0,014.57	—
31	0,017.37	—	0,016.60	—	0,015.11	—	0,017.38	0,017.09	—	0,015.91	—	0,014.54	—
	0,480.09	0,522.81	0,562.77	0,451.99	0,459.15	0,467.61	0,522.68	0,544.14	0,500.73	0,503.09	0,467.49	0,462.50	5,944.05

PROSPETTO N. 30.

Frequenza mensile e giornaliera delle malattie.

MESI	Frequenza mensile delle malattie	Frequenza giornaliera delle malattie
Gennaio	0,02194	0,0007c7
Febbraio	0,02900	0,001036
Marzo	0,02490	0,000803
Aprile	0,01621	0,000540
Maggio	0,01633	0,000527
Giugno	0,01707	0,000569
Luglio	0,01823	0,000588
Agosto	0,01840	0,000594
Settembre	0,01605	0,000555
Ottobre	0,01723	0,000556
Novembre	0,01600	0,000535
Dicembre	0,02713	0,000553
	0,22912	—

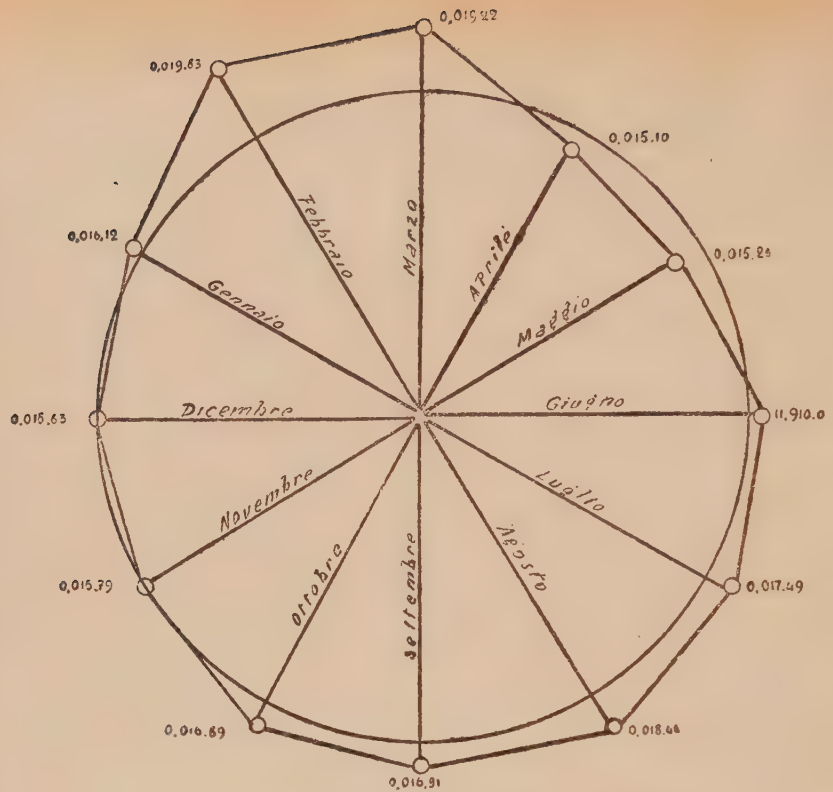


FIG. 20. — Coefficienti di morbilità nei singoli mesi.

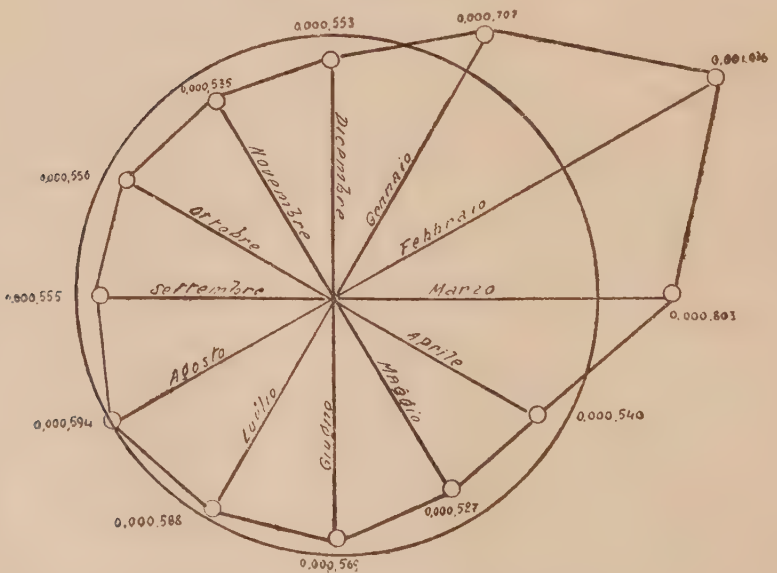


FIG. 21. — Frequenza delle malattie nei singoli mesi.

N° 5 — Classificazione dei commerci esercitati dalle aziende assicurate e delle professioni dei prestatori d'opera.

Gruppi.

1 – Commercio di animali vivi, materie prime, ecc.
2 – Commercio di generi alimentari.
3 – Commercio di articoli per l'abbigliamento.
4 – Commercio di articoli per l'arredamento.
5 – Commercio di metalli, macchine, ecc.
6 – Commercio di oggetti d'arte.
7 – Commercio di prodotti chimici e farmaceutici.
8 – Alberghi, trattorie, caffè, servizi igienici, sanitari, ecc.
9 – Attività ausiliarie del commercio.
0 – Gestioni diverse.

Sottogruppi.

11 – Commercio di animali vivi in genere.
12 – Commercio di materie prime per l'agricoltura.
13 – Commercio di materie prime per le industrie tessili.
14 – Commercio di pelli, setole, crini, cordami, sacchi, tele di juta.
15 – Commercio di cereali, foraggi.
16 – Commercio di legname e materiale da costruzione.
17 – Altri esercizi ed esercizi misti del gruppo.

21 – Macellerie, norcinerie, pollerie, pescherie.
22 – Latterie, pizzicherie.
23 – Farina, pane, alimentari, biscotti.
24 – Frutta, ortaggi, legumi, funghi.
25 – Caffè, tè, zucchero, droghe, ecc.
26 – Vino, birra, olio, acque minerali, ghiaccio.
27 – Dolci e simili.
28 – Altri esercizi ed esercizi misti del gruppo.

31 – Commercio di filati, tessuti.
32 – Commercio di mercerie, passamanerie.
33 – Commercio di biancherie, maglierie e affini.
34 – Commercio di abiti.
35 – Commercio di calzature.
36 – Commercio di cappelli.
37 – Commercio di guanti, pelliccerie, ecc.
38 – Commercio di articoli da viaggio.
39 – Altri esercizi ed esercizi misti del gruppo.

41 – Commercio di mobili.
42 – Commercio di tappezzerie.
43 – Commercio di utensili e oggetti per famiglia.
44 – Commercio di articoli per l'illuminazione.
45 – Commercio di oggetti vari per l'arredamento (specchi, cristalli, cornici, ecc.).
46 – Altri esercizi ed esercizi misti del gruppo.

51 – Commercio di ferramenta ed ottonami.
52 – Armi, munizioni, esplodenti.
53 – Macchine ed utensili per uso agricolo.
54 – Macchine ed utensili per uso industriale.

55 – Macchine e strumenti di precisione: ottica, apparecchi fotografici e cinematografici.
56 – Macchine per uffici.
57 – Veicoli ed accessori.
58 – Altri servizi ed esercizi misti del gruppo.

61 – Commercio di cartolerie e librerie.
62 – Commercio di quadri, bronzi, sculture, stampe antiche e moderne; filatelia; antiquari in genere; fotografie artistiche.
63 – Gioiellerie, oreficerie, argenterie, orologerie.
64 – Bazar ed empori.
65 – Commercio di musica, strumenti musicali, apparecchi radiofonici, grammofoni.
66 – Commercio di arredi sacri.
67 – Commercio di attrezzi sportivi.
68 – Commercio di piante, fiori, foglie ornamentali.
69 – Case di vendita all'asta.
70 – Altri esercizi ed esercizi misti del gruppo.

71 – Commercio di prodotti chimici per usi industriali.
72 – Commercio di prodotti chimici per usi agricoli.
73 – Commercio di medicinali, farmacie.
74 – Commercio di oggetti da toletta e di igiene.
75 – Commercio di colori, vernici, ecc.
76 – Commercio di lubrificanti, carburanti, ecc.
77 – Commercio di candele, saponi, liscive, ecc.
78 – Commercio di legna da ardere e carbone.
79 – Altri esercizi ed esercizi misti del gruppo.

81 – Alberghi, pensioni, affittacamere.
82 – Trattorie, rosticcerie, osterie, ecc.
83 – Caffè, bar, birrerie e simili.
84 – Buffet di stazione.
85 – Vagoni letto e vagoni ristoranti.
86 – Barbieri e parrucchieri.
87 – Case di cura e stabilimenti termali.
88 – Stabilimenti di bagni.
89 – Altri esercizi ed esercizi misti del gruppo.

91 – Agenzie di viaggio e di turismo.
92 – Magazzini generali, doks, sylos.
93 – Agenti marittimi e raccomandatari.
94 – Imprese di sbarco ed imbarco.
95 – Case di importazione ed esportazione.
96 – Agenzie di assicurazione.
97 – Agenzie di cambio.
98 – Altre attività ausiliarie.

01 – Grandi magazzini.
02 – Esercizi di vendita di ogni genere.
03 – Commercio di oggetti usati.
04 – Cooperative di consumo.
05 – Attività commerciali varie, non specificate o mal definite.

PROFESSIONI.

1 – Viaggiatori e piazzisti.
2 – Personale tecnico e amministrativo.
3 – Personale addetto alla vendita.
4 – Operai.

N° 6 — Nomenclature nosologiche per la statistica delle malattie.

Gruppi.

1 – Malattie infettive e parassitarie.
2 – Tumori e granulomi.
3 – Malattie reumatiche, della nutrizione e delle ghiandole a secrezione interna, ed altre malattie generali.
4 – Malattie del sangue e degli organi ematopoietici.
5 – Malattie mentali, del sistema nervoso e degli organi dei sensi.
6 – Avvelenamenti ed intossicazioni, anafilassi.
7 – Malattie dell'apparato respiratorio.
8 – Malattie dell'apparato circolatorio e linfatico.
9 – Malattie dell'apparato digerente.
0 – Malattie dell'apparato uro-genitale.

a – Gravidanza, malattie della gravidanza, parto, stato puerperale.
b – Malattie della pelle e del cellulare, dei muscoli, delle ossa e delle articolazioni.
c – Malattie da causa violenta.
d – Malattie da cause non specificate o mal definite.

Generi e specie.

11 – *Malattie infettive da causa nota :*
111 – Tifo addominale.
112 – Paratifo.
113 – Tifo esantematico.
114 – Influenza.
115 – Tubercolosi dell' apparato respiratorio, compresi i gangli tracheo-bronchiali.
116 – Altre forme di tubercolosi.
117 – Blenorragia ed altre malattie veneree.
118 – Setticemie non puerperali.
119 – Difterite.
110 – Altre malattie infettive da causa nota.

12 – *Malattie infettive da causa non sicuramente nota od ignota :*
121 – Vaiuolo.
122 – Morbillo.
123 – Altre malattie esantematiche.
124 – Altre malattie da causa non sicuramente nota od ignota.

13 – *Malattie da protozoi :*
131 – Sifilide.
132 – Malaria.
133 – Dissenteria amebica.
134 – Altre malattie da protozoi.

14 – *Malattie da elminti :*
141 – Anchilostomiasi.
142 – Echinococco.
143 – Altri elminti.

15 – *Malattie micotiche.*

21 – *Tumori maligni :*
211 – Cancri.
212 – Sarcomi.
213 – Altri tumori.

22 – *Tumori non maligni o di cui non sia specificato il carattere di malignità.*

23 – *Granulomi :*
231 – Granulomi tubercolari.
232 – Granuloma luetico.
233 – Granuloma maligno.

31 – *Malattie reumatiche acute :*
- 311 – Reumatismo articolare acuto.
- 312 – Reumatismo acuto o subacuto non meglio specificato.
- 313 – Altre forme indicate come reumatiche (acute o subacute).

32 – *Malattie reumatiche croniche :*
- 321 – Reumatismo articolare cronico.
- 322 – Reumatismo muscolare cronico.
- 323 – Reumatismo cronico non meglio specificato.
- 324 – Altre forme croniche indicate come reumatiche.

33 – *Malattie del ricambio :*
- 321 – Gotta.
- 332 – Diabete mellito.
- 333 – Obesità.
- 334 – Avitaminosi (scorbuto, Beri-beri).
- 335 – Altre malattie del ricambio.

34 – *Malattie da disfunzioni endocrine :*
- 341 – Malattie da disfunzione della tiroide.
- 342 – Malattie da disfunzione della paratiroide.
- 343 – Malattie da disfunzione dell'epifisi.
- 344 – Malattie da disfunzione dell'ipofisi.
- 345 – Malattie da disfunzione delle capsule surrenali non indicate come tubercolari.
- 346 – Malattie da disfunzione delle glandole genitali.
- 347 – Altre malattie da disfunzione delle glandole a secrezione interna.

35 – *Altre malattie generali.*

41 – *Diatesi emorragiche :*
- 411 – Porpore.
- 412 – Emofilie.

42 – *Stati anemici :*
- 421 – Anemie semplici e secondarie.
- 422 – Anemie perniciose.

43 – *Stati leucemici ed aleucemici :*
- 431 – Leucemie vere.
- 432 – Aleucemie.

44 – *Malattie degli organi ematopoietici :*
- 441 – Malattie della milza.
- 442 – Malattie del midollo osseo.

45 – *Altre malattie del sangue.*

51 – *Malattie organiche del sistema nervoso centrale :*
- 511 – Encefaliti non epidemiche.
- 512 – Ascessi dell'encefalo.
- 513 – Disturbi circolatori, iperemia, emorragia, embolia, trombosi.
- 514 – Paralisi progressiva degli alienati.
- 515 – Altre malattie dell'encefalo.
- 516 – Mieliti.
- 517 – Atassia locomotrice
- 518 – Altre malattie del midollo.

52 – *Malattie del sistema nervoso periferico :*
- 521 – Malattie del sistema autonomo e simpatico.
- 522 – Malattie dei nervi.

53 – *Malattie delle meningi e plessi coroidei :*
- 531 – Meningiti acute.
- 532 – Meningiti croniche non tubercolari, nè sifilitiche.
- 533 – Altre malattie delle meningi e plessi coroidei.

54 – *Malattie funzionali del sistema nervoso :*
- 541 – Isteria.
- 542 – Neurastenia.
- 543 – Epilessia essenziale.
- 544 – Psicosi.
- 545 – Demenza precoce ed altre psicosi.
- 546 – Altre malattie funzionali.

55 – *Malattie degli occhi ed annessi :*
- 551 – Congiuntivite, compreso il tracoma.
- 552 – Cheratite.
- 553 – Irite.
- 554 – Cateratta.
- 555 – Glaucoma.
- 556 – Altre malattie dell'occhio ed annessi.

56 – *Malattie dell'orecchio ed annessi :*
- 561 – Otite.
- 562 – Mastoidite.
- 563 – Altre malattie dell'orecchio ed annessi.

61 – *Avvelenamenti ed intossicazioni acute :*
- 611 – Avvelenamenti acuti da sostanze organiche, compreso l'alcool.
- 612 – Avvelenamenti da sostanze inorganiche.

62 – *Avvelenamenti ed intossicazioni croniche :*
- 621 – Avvelenamento cronico professionale da sostanze organiche.
- 622 – Altri avvelenamenti cronici da sostanze organiche.
- 623 – Avvelenamento cronico professionale da sostanze inorganiche.
- 624 – Altri avvelenamenti cronici da sostanze inorganiche

63 – *Anafilassi.*

71 – *Malattie delle prime vie respiratorie :*
- 711 – Malattie delle fosse nasali ed annessi.
- 712 – Malattie della laringe e trachea.
- 713 – Malattie dei bronchi.

72 – *Malattie dei polmoni e della pleura :*
- 721 – Disturbi circolatori (congestione, edema, ecc.).
- 722 – Polmoniti acute.
- 723 – Polmoniti croniche (comprese le polmoniti professionali).
- 724 – Stati asmatici.
- 725 – Bronchiettasie.
- 726 – Altre malattie del polmone.
- 727 – Pleuriti di cui non sia stata specificata la natura tubercolare o neoplastica.

73 – *Malattie del mediastino :*
- 731 – Mediastiniti.
- 732 – Mediastinite cronica (esclusse le forme tubercolari).

81 – *Malattie del cuore e pericardio :*
- 811 – Pericarditi ed altre malattie del pericardio.
- 812 – Endocarditi.
- 813 – Miocarditi.
- 814 – Vizi valvolari acquisiti e congeniti.
- 815 – Malattie funzionali del cuore.
- 816 – Altre malattie del cuore.

82 – *Malattie dei vasi sanguigni :*
- 821 – Arteriti (comprese l'arteriosclerosi e la gangrena).
- 822 – Malattie delle arterie coronarie ed angina pectoris.
- 823 – Flebiti (comprese le varici e le emorroidi).
- 824 – Malattie dei capillari.
- 825 – Altre malattie dei vasi sanguigni.

83 – *Malattie delle ghiandole e vasi linfatici :*
- 831 – Adeniti acute (non veneree).
- 832 – Adeniti croniche (non tubercolari e non sifilitiche).
- 833 – Linfangiti.
- 834 – Altre malattie delle ghiandole e dei vasi linfatici.

91 – *Malattie delle prime vie digerenti :*
- 911 – Malattie della bocca ed annessi.
- 912 – Malattie della faringe.
- 913 – Malattie dell'esofago.
- 914 – Malattie della amigdale.
- 915 – Affezioni adenoidi.
- 916 – Altre malattie delle prime vie digerenti.

92 – *Malattie dello stomaco ed intestino :*
- 921 – Gastriti.
- 922 – Ulcera dello stomaco e del duodeno.
- 923 – Altre malattie dello stomaco (cancro eccettuato).
- 924 – Enteriti, enterecoliti e gastroenteriti.
- 925 – Ulcerazioni intestinali.
- 926 – Appendicite.
- 927 – Ernie.
- 928 – Occlusione intestinale.
- 929 – Altre malattie dell'intestino.

93 – *Malattie del fegato e vie biliari :*
- 931 – Epatiti.
- 932 – Calcolosi.
- 933 – Malattie della cistifellea e vie biliari.
- 934 – Altre malattie del fegato e delle vie biliari compresa la atrofia giallo-acuta.
- 935 – Itteri non infettivi.

94 – *Malattie del pancreas.*

95 – *Malattie del peritoneo :*
- 951 – Peritoniti acute.
- 952 – Peritoniti croniche non tubercolari.

01 – *Malattie dei reni (non comprese le malattie renali in gravidanza) :*
- 011 – Albuminurie.
- 012 – Nefriti acute.
- 013 – Nefriti croniche.
- 014 – Nefriti non specificate.
- 015 – Calcolosi.
- 016 – Uremia.
- 017 – Altre malattie renali.

02 – *Malattie dei bacinetti e dell'uretere.*

03 – *Malattie della prostata, dell'uretra e della vescica (esclusi i tumori) :*
- 031 – Prostatiti.
- 032 – Ipertrofie prostatiche.
- 033 – Restringimenti uretrali.
- 034 – Cistiti.
- 035 – Ascessi urinari.
- 036 – Altre malattie della prostata, uretra e vescica.

04 – *Malattie non veneree dei genitali maschili :*
- 041 – Malattie del testicolo.
- 042 – Malattie degli annessi.
- 043 – Altre malattie non veneree dei genitali maschili.

05 – *Malattie non veneree dei genitali femminili :*
- 051 – Malattie delle ovaie, tromba e parametrio.
- 052 – Malattie dell'utero, esclusi i tumori.
- 053 – Malattie delle mammelle, esclusi i tumori.
- 054 – Altre malattie non veneree dei genitali femminili.

a1 – Gravidanza normale.

a2 – Complicanze e interruzioni della gravidanza :
- *a21* – Albuminuria.
- *a22* – Stati tossici.
- *a23* – Eclampsia.
- *a24* – Aborto non settico e senza indicazioni, comprese le emorragie.
- *a25* – Aborto settico.
- *a26* – Parto prematuro.
- *a27* – Gravidanze extra-uterine.
- *a28* – Altre malattie ed accidenti della gravidanza, non comprese le emorragie.

a3 – Parto fisiologico.

a4 – Complicanze del parto :
- *a41* – Emorragie da placenta previa.
- *a42* – Altre emorragie.
- *a43* – Altri accidenti del parto.

a5 – Puerperio normale.

a6 – Puerperio patologico :
- *a61* – Setticemie e infezioni puerperali.
- *a62* – Flegmasia alba dolens.
- *a63* – Embolie.
- *a64* – Altre condizioni patologiche dello stato puerperale.

b1 – Malattie cutanee propriamente dette e degli annessi della pelle :
- *b11* – Eczemi.
- *b12* – Malattie parassitarie.
- *b13* – Altre malattie della pelle, degli annessi e del cellulare non infiammatorie.

b2 – Malattie cutanee infiammatorie :
- *b21* – Foruncoli e favi.
- *b22* – Ascessi, flemmoni e celluliti.
- *b23* – Altre malattie infiammatoric della pelle ed annessi.

b3 – Malattie dei muscoli, aponevrosi e tendini :
- *b31* – Miositi.
- *b32* – Altre malattie dei muscoli, aponevrosi e tendini, escluse quelle reumatiche.

b4 – Malattie delle ossa e cartilagini :
- *b41* – Osteiti e osteoperiostiti.
- *b42* – Osteomieliti, escluse le forme tubercolari e sifilitiche.
- *b43* – Condriti.
- *b44* – Altre malattie delle ossa e delle cartilagini, esclusa la tubercolosi.

b5 – Malattie delle articolazioni e periarticolazioni :
- *b51* – Artrosinoviti acute.
- *b52* – Artrosinoviti croniche, escluse quelle tubercolari e sifilitiche.
- *b53* – Altre malattie articolari e periarticolari.

c1 – Infortuni professionali :
- *c11* – Da agenti fisici.
- *c12* – Da agenti chimici.
- *c13* – Da agenti biochimici.
- *c14* – Da agenti biodinamici.
- *c15* – Da altre cause.

c2 – Infortuni extra professionali :
- *c21* – Da agenti fisici.
- *c22* – Da agenti chimici.
- *c23* – Da agenti biochimici.
- *c24* – Da agenti biodinamici.
- *c25* – Da altre cause.

c3 – Lesioni traumatiche volontarie :
- *c31* – Suicidio e tentato suicidio.
- *c32* – Autolesioni.
- *c33* – Lesioni procurate da terza persona.
- *c34* – Altre lesioni traumatiche volontarie.

d – Malattie da cause non specificate o mal definite.

TAVOLE STATISTICHE

N. B. — Per il significato dei simboli, vedasi pag. 107.

TAVOLA *A*.

Tavole di morbilità per i prestatori d'opera del commercio - 1931.

Esperienza complessiva.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15	3.188	258	5.993	0,109	2,42000	23,23	15
16	6.090	767	17.370	0,124	2,89000	22,65	16
17	7.911	1.109	26.589	0,139	3,37000	23,98	17
18	8.998	1.380	32.919	0,154	3,81000	23,85	18
19	9.728	1.490	38.247	0,169	4,22000	25,67	19
15–19	35.915	5.004	121.118	0,139	3,37000	24,20	15–19
20	7.327	1.597	38.730	0,184	4,63000	24,25	20
21	6.597	1.273	33.449	0,198	5.00000	26,28	21
22	5.808	1.264	33.912	0.211	5,30000	26,83	22
23	7.204	1.563	39.617	0,221	5,54000	25,35	23
24	7.521	1.579	39.631	0,230	5,76000	25,10	24
20–24	34.457	7.276	185.339	0,211	5,38000	25,47	20–24
25	7.204	1.737	43.356	0,240	5,96000	24,96	25
26	6.870	1.705	41.831	0,247	6,13000	24,53	26
27	6.537	1.666	40.261	0,254	6,29000	24,17	27
28	6.227	1.625	39.403	0,260	6,44000	24,25	28
29	5.935	1.579	38.973	0,266	6,59000	24,68	29
25–29	32.773	8.312	203.824	0,254	6,22000	24,52	25–29
30	5.638	1.528	38.015	0,271	6,71000	24,88	30
31	5.340	1.472	36.666	0,275	6,84000	24,91	31
32	5.043	1.409	35.194	0,278	6,98000	24,98	32
33	4.747	1.338	33.680	0,282	7,11000	25,17	33
34	4.462	1.265	32.159	0,286	7,24000	25,42	34
30–34	25.230	7.012	175.714	0,278	6,96000	25,06	30–34
35	4.187	1.192	30.590	0,285	7,30595	25,66	35
36	3.908	1.115	28.914	0,285	7,39867	25,93	36
37	3.677	1.043	27.331	0,284	7,43296	26,20	37
38	3.516	983	25.948	0,280	7,37997	26,40	38
39	3.398	931	24.698	0,274	7,26839	26,53	39
35–39	18.686	5.264	137.481	0,282	7,35743	26,12	35–39

Segue TAVOLA *A.*

x	E_x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
40	3.277	879	23.427	0,268	7,14891	26,65	40
41	3.178	827	22.209	0,260	6,98836	26,85	41
42	3.056	775	20.972	0,254	6,86256	27,06	42
43	2.887	726	19.652	0,251	6,80707	27,07	43
44	2.689	675	18.332	0,251	6,81740	27,16	44
40–44	15.087	3.882	104.592	0,257	6,93253	26,94	40–44
45	2.511	627	17.101	0,249	6,81043	27,27	45
46	2.334	581	15.903	0,249	6,81362	27,37	46
47	2.176	539	14.802	0,248	6,80238	27,46	47
48	2.056	500	13.845	0,243	6,73360	27,69	48
49	1.959	465	13.007	0,237	6,63961	27,97	49
45–49	11.036	2.712	74.658	0,246	6,76495	27,53	45–49
50	1.858	432	12.184	0,233	6,55758	28,20	50
51	1.766	401	11.417	0,227	6,46489	28,47	51
52	1.670	370	10.823	0,222	6,48084	29,25	52
53	1.565	350	10.360	0,224	6,61980	29,60	53
54	1.453	332	9.990	0,228	6,87543	30,09	54
50–54	8.312	1.885	54.774	0,227	6,58975	29,06	50–54
55	1.349	313	9.661	0,232	7,16160	30,87	55
56	1.249	298	9.384	0,239	7,51321	31,49	56
57	1.155	282	9.067	0,244	7,85022	32,15	57
58	1.065	265	8.635	0,249	8,10798	32,58	58
59	981	249	8.124	0,255	8,28135	32,63	59
55–59	5.799	1.407	44.871	0,243	7,73771	31,89	55–59
60	900	233	7.551	0,259	8,39000	32,41	60
61	822	218	7.107	0,265	8,64598	32,60	61
62	748	205	6.657	0,274	8,89973	32,47	62
63	681	190	6.219	0,279	9,13216	32,73	63
64	618	177	5.790	0,286	9,36893	32,71	64
60–64	3.769	1.023	33.324	0,271	8,84160	32,57	60–64
15–64	191.064	43.777	1.135.695	0,229	5,94405	25,94	15–64

TAVOLA *A-1*.

Tavole di morbiilità per i prestatori d'opera del commercio - 1931.

Esperienza complessiva.

MASCHI.

x	E_x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15	1.924	149	3.300	0,103	2,39000	23,10	15
16	4.583	560	12.272	0,118	2,74000	23,04	16
17	6.197	836	19.127	0,135	3,09000	22,98	17
18	7.113	1.049	23.419	0,150	3,44000	22,93	18
19	7.710	1.111	27.034	0,166	3,80000	22,87	19
15–19	27.527	3.705	85.152	0,135	3,09000	22,98	15–19
20	5.205	1.185	25.948	0,183	4,10000	22,81	20
21	4.392	828	19.450	0,198	4,36000	22,75	21
22	3.581	800	19.164	0,212	4,62000	22,70	22
23	5.028	1.095	24.707	0,224	4,88000	22,64	23
24	5.444	1.119	24.944	0,234	5,11000	22,58	24
20–24	23.650	5.027	114.213	0,213	4,83000	22,72	20–24
25	5.231	1.286	29.019	0,243	5,34000	22,57	25
26	5.028	1.271	28.058	0,251	5,54000	22,08	26
27	4.826	1.253	27.203	0,259	5,75000	21,71	27
28	4.625	1.231	27.094	0,264	5,96000	22,01	28
29	4.425	1.205	27.411	0,270	6,18000	22,75	29
25–29	24.135	6.246	138.785	0,259	5,75000	22,22	25–29
30	4.230	1.175	27.276	0,275	6,38000	23,21	30
31	4.044	1.145	26.892	0,280	6,58000	23,49	31
32	3.846	1.106	26.267	0,286	6,78000	23.75	32
33	3.629	1.056	25.340	0,291	6,98000	24,00	33
34	3.406	1.001	24.234	0,296	7,18000	24,21	34
30–34	19.155	5.483	130.009	0,286	6,79000	23,71	30–34
35	3.196	947	23.127	0,296	7,23622	24,42	35
36	2.979	889	21.919	0,298	7,35783	24,66	36
37	2.803	835	20.759	0,298	7,40598	24,86	37
38	2.690	788	19.760	0,293	7,34572	25,08	38
39	2.615	746	18.878	0,285	7,21912	25,31	39
35–39	14.283	4.205	104.443	0,294	7,31239	24,84	35–39

Segue TAVOLA *A-1.*

x	E_x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
40	2.536	704	17.962	0,278	7,08280	25,51	40
41	2.472	661	17.026	0,267	6,88753	25,76	41
42	2.394	621	16.145	0,259	6,74339	26,00	42
43	2.284	586	15.346	0,257	6,71891	26,19	43
44	2.154	553	14.605	0,257	6,78041	26,41	44
40–44	11.840	3.125	81.084	0,264	6,84831	25,95	40–44
45	2.038	522	13.890	0,256	6,81550	26,61	45
46	1.923	492	13.226	0,256	6,87778	26,88	46
47	1.818	464	12.548	0,255	6,90208	27,04	47
48	1.732	434	11.828	0,251	6,82909	27,25	48
49	1.658	404	11.104	0,244	6,69722	27,48	49
45–49	9.169	2.316	62.596	0,252	6,82692	27,03	45–49
50	1.581	377	10.431	0,238	6,59772	27,67	50
51	1.509	351	9.758	0,233	6,46653	27,80	51
52	1.434	327	9.215	0,228	6,42608	28,18	52
53	1.354	309	8.870	0,228	6,55096	28,71	53
54	1.270	294	8.642	0,231	6,80472	29,39	54
50–54	7.148	1.658	46.916	0,232	6,56351	28,30	50–54
55	1.190	279	8.399	0,234	7,05798	30,10	55
56	1.111	266	8.199	0,239	7,37984	30,82	56
57	1.035	253	7.968	0,244	7,69855	31,49	57
58	960	239	7.645	0,249	7,96354	31,99	58
59	888	226	7.260	0,254	8,17568	32,12	59
55–59	5.184	1.263	39.471	0,244	7,61400	31,25	55–59
60	817	213	6.900	0,261	8,44553	32,39	60
61	748	201	6.546	0,269	8,75134	32,57	61
62	680	191	6.180	0,281	9,08824	32,36	62
63	613	181	5,813	0,295	9,48229	32,12	63
64	548	171	5.435	0,312	9,91788	31,78	64
60–64	3.406	957	30.874	0,281	9,06459	32,26	60–64
15–64	145.497	33.985	833.543	0,234	5,72894	24,54	15–64

TAVOLA *A-2*.

Tavole di morbilità per i prestatori d'opera del commercio - 1931.

Esperienza complessiva.

FEMMINE.

x	E_x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
15	1.264	109	2.693	0,086	2,13054	24,71	15
16	1.507	207	5.098	0,137	3.38288	24,63	16
17	1.714	273	7.462	0,159	4,35356	27,33	17
18	1.885	331	9.500	0,176	5,03979	28,70	18
19	2.018	379	11.213	0,188	5,55649	29,59	19
15–19	8.388	1.299	35.966	0,155	4,28779	27,69	15–19
20	2.122	412	12.782	0,194	6.02356	31,02	20
21	2.205	445	13.999	0,202	6,34875	31,46	21
22	2.227	464	14.748	0,208	6,62236	31,78	22
23	2.176	468	14.910	0,215	6,85202	31,86	23
24	2.077	460	14.687	0,221	7,07126	31,93	24
20–24	10.807	2.249	71.126	0,208	6,58147	31,63	20–24
25	1.973	451	14.337	0,229	7,26660	31,79	25
26	1.842	434	13.773	0,236	7,47720	31,73	26
27	1.711	413	13.058	0,241	7,63179	31,62	27
28	1.602	394	12.309	0,246	7,68352	31,24	28
29	1.510	374	11.562	0,248	7,65695	30,91	29
25–29	8.638	2.066	65.039	0,239	7,52940	31,48	25–29
30	1.408	353	10.739	0,251	7,62713	30,42	30
31	1.296	327	9.774	0,252	7,54167	29,89	31
32	1.197	303	8.927	0,253	7,45781	29,46	32
33	1.118	282	8.340	0,252	7,45975	29,57	33
34	1.056	264	7.925	0,250	7,50473	30,02	34
30–34	6.075	1.529	45.705	0,252	7,52346	29,89	30–34
35	991	245	7.463	0,247	7,53078	30,46	35
36	929	226	6.995	0,243	7,52960	30,95	36
37	874	208	6.572	0,238	7,51945	31,60	37
38	826	195	6.188	0,236	7,49153	31,73	38
39	783	185	5.820	0,236	7,43295	31,46	39
35–39	4.403	1.059	33.038	0,241	7,50352	31,20	35–39

Segue TAVOLA *A-2.*

x	E_x	c_x	n_x	f_x	z_x	δ_x	x
40	741	175	5.465	0.236	7,37517	31,23	40
41	706	166	5.183	0,235	7,34136	31,22	41
42	662	154	4.827	0.233	7,29154	31,34	42
43	603	140	4.306	0,232	7,14096	30,76	43
44	535	122	3.727	0,228	6,96636	30,55	44
40–44	3.247	757	23.508	0,233	7,23991	31,05	40–44
45	473	105	3.211	0,222	6,78858	30,58	45
46	411	89	2.677	0,217	6,51338	30,08	46
47	358	75	2.254	0,209	6,29609	30,05	47
48	324	66	2.017	0,204	6,22531	30,56	48
49	301	61	1.903	0,203	6,32226	31,20	49
45–49	1.867	396	12.062	0,212	6,46063	30,46	45–49
50	277	55	1.753	0,199	6,32852	31,87	50
51	257	50	1.659	0,195	6,45525	33,18	51
52	236	43	1.608	0,182	6,81356	37,40	52
53	211	41	1.490	0,194	7,06161	36,34	53
54	183	38	1.348	0,208	7,36612	35,47	54
50–54	1.164	227	7.858	0,195	6,75086	34,62	50–54
55	159	34	1.262	0,214	7,93711	37,12	55
56	138	32	1.185	0,232	8,58696	37,03	56
57	120	29	1.099	0,242	9,15833	37,90	57
58	105	26	990	0,248	9,42857	38,08	58
59	93	23	864	0,247	9,29032	37,57	59
55–59	615	144	5.400	0,234	9,78049	37,50	55–59
60	83	20	651	0,241	7,84337	32,55	60
61	74	17	561	0,230	7,58108	33,00	61
62	68	14	477	0,206	7,01470	34,07	62
63	68	9	406	0,132	5,97059	45,11	63
64	70	6	355	0,086	5,07143	59,17	64
60–64	363	66	2.450	0,182	6,74931	37,12	60–64
15–64	45.567	9.792	302.152	0,215	6,63094	30,86	15–64

Tavole di morbilità per categorie commerciali. - 1931.

TAVOLA *B*.

Commercio di animali vivi, materie prime, ecc.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	554	1.767	76	0,137	3,18953	23,25	15–19
20–24	752	4.327	139	0,173	4,44672	31,13	20–24
25–29	890	4.137	175	0,203	5,21600	23,64	25–29
30–34	710	4.585	175	0,221	5,59231	26,20	30–34
35–39	531	2.860	126	0,217	5,66191	22,70	35–39
40–44	445	2.285	87	0,200	5,73182	26,26	40–44
45–49	377	2.626	60	0,183	5,92738	43,77	45–49
50–54	286	1,436	51	0,181	6,18858	28,16	50–54
55–59	230	1.553	43	0,193	6,97425	36,12	55–59
60–64	156	1,258	33	0,212	8,06410	38,12	60–64
15–64	4.931	26.834	965	0,198	5,44190	27,81	15–64

TAVOLA *B-1*.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	475	1.350	62	0,131	2,84211	21,77	15–19
20–24	591	2.890	112	0,172	3,87679	25,80	20–24
25–29	767	2.947	150	0,206	4,62293	19,65	25–29
30–34	619	3.750	157	0,226	5,18323	23,89	30–34
35–39	469	2.505	115	0,222	5,50864	21,78	35–39
40–44	404	2.108	81	0,205	5,77390	26,02	40–44
45–49	356	2.549	57	0,187	5,98892	44,72	45–49
50–54	267	1.402	49	0,186	6,23303	28,61	50–54
55–59	218	1.426	42	0,198	7,11553	33,95	55–59
60–64	147	1.253	32	0,218	8,52381	39,16	60–64
15–64	4.313	22.180	857	0,199	5,14259	25,88	15–64

TAVOLA *B-2*.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	79	417	14	0,177	5,27848	29,79	15–19
20–24	161	1.437	27	0,183	7,49892	53,22	20–24
25–29	123	1.190	25	0,189	8,47014	47,60	25–29
30–34	91	835	18	0,186	7,95235	46,39	30–34
35–39	62	355	11	0,174	6,38941	32,27	35–39
40–44	41	177	6	0,153	4,74461	29,50	40–44
45–49	21	77	3	0,132	3,33303	25,67	45–49
50–54	19	34	2	0,114	2,18789	17 —	50–54
55–59	12	127	1	0,107	1,28717	127 —	55–59
60–64	9	5	1	0,111	0,55556	5 —	60–64
15–64	618	4.654	108	0,175	7,53074	43,09	15–64

TAVOLA C.

Commercio di generi alimentari.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	12.761	34.768	1.489	0,117	2,72455	23,35	15–19
20–24	9.822	48.286	1.926	0,186	4,48525	25,07	20–24
25–29	8.288	52.648	2.214	0,240	5,88844	23,78	25–29
30–34	6.206	43.021	1.760	0,268	6,78770	24,44	30–34
35–39	4.476	33.650	1.266	0,278	7,23898	26,58	35–39
40–44	3.740	28.560	984	0,274	7,45520	29,02	40–44
45–49	2.820	20.044	811	0,272	7,63059	24,72	45–49
50–54	2.149	17.201	544	0,275	8,27473	31,62	50–54
55–59	1.548	13.240	413	0,299	9,58118	32,06	55–59
60–64	942	10.835	320	0,340	11,50212	33,86	60–64
15–64	52.752	302.253	11.727	0,222	5,72970	25,77	15–64

TAVOLA C-1.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	11.315	30.008	1.346	0,119	2,65205	22,29	15–19
20–24	8.169	38.429	1.643	0,193	4,39110	23,39	20–24
25–29	7.090	44.576	1.982	0,250	5,83998	22,49	25–29
30–34	5.414	37.513	1.609	0,280	6,83366	23,31	30–34
35–39	3.873	30.132	1.148	0.290	7,40235	26,25	35–39
40–44	3.269	25.752	903	0.286	7,64974	28,52	40–44
45–49	2.560	18.895	760	0,281	7,80037	24,86	45–49
50–54	2.004	15.960	521	0,280	8,27932	30,63	50–54
55–59	1.470	12.638	397	0,298	9,29493	31,83	55–59
60–64	896	10.162	311	0,330	10,78769	32,68	60–64
15–64	46.060	264.065	10.620	0,231	5,73307	24,86	15–64

TAVOLA C-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.446	4.760	143	0,099	3,29184	33,29	15–19
20–24	1.653	9.857	283	0,146	5,05821	34,83	20–24
25–29	1.198	8.072	232	0,177	6,13056	34,79	25–29
30–34	792	5.508	151	0,188	6,43696	36,48	30–34
35–39	603	3.518	118	0,189	6,05470	29,81	35–39
40–44	471	2.808	81	0,183	5,98948	34,67	40–44
45–49	260	1.149	51	0,184	6,20562	22,53	45–49
50–54	145	1.241	23	0,183	7,83805	53,96	50–54
55–59	78	602	16	0,190	10,61045	37,62	55–59
60–64	46	673	9	0,196	14,63043	74,78	60–64
15–64	6.692	38.188	1.107	0,165	5,70577	34,49	15–64

TAVOLA *D.*

Commercio di articoli per l'abbigliamento.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	5.694	23.562	840	0,148	4,13804	28,05	15–19
20–24	5.616	32.044	1.203	0,193	5,23650	26,64	20–24
25–29	4.548	29.311	1.061	0,225	5,93142	27,63	25–29
30–34	3.247	20.375	815	0,239	6,08717	25 —	30–34
35–39	2.315	13.771	564	0,240	6,01899	24,42	35–39
40–44	1.838	10.048	416	0,228	5,83514	24,15	40–44
45–49	1.258	8.047	297	0,218	5,89316	27,09	45–49
50–54	958	4.934	160	0,208	5,97337	30,84	50–54
55–59	664	4.420	150	0,211	6,32228	29,47	55–59
60–64	500	3.359	110	0,220	6,71800	30,54	60–64
15–64	26.638	149.871	5.616	0,211	5,62621	26,69	15–64

TAVOLA *D-1.*

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	3.690	14.513	542	0,147	3,93306	26,78	15–19
20–24	2.938	15.034	645	0,192	4,72969	23,31	20–24
25–29	2.764	14.506	619	0,225	5,34336	23,43	25–29
30–34	2.135	13.033	545	0,242	5,70732	23,91	30–34
35–39	1.609	9.605	419	0,245	5,84245	22,92	35–39
40–44	1.374	7.557	311	0,232	5,67906	24,30	40–44
45–49	1.003	6.235	239	0,224	5,58133	26,09	45–49
50–54	813	3.362	131	0,212	5,56323	25,66	50–54
55–59	601	3.812	136	0,219	6,15026	28,03	55–59
60–64	467	3.290	107	0,229	7,04497	30,75	60–64
15–64	17.394	90.947	3.694	0,212	5,22864	24,62	15–64

TAVOLA *D-2.*

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	2.004	9.049	298	0,149	4,51547	30,37	15–19
20–24	2.678	17.010	558	0,195	5,99616	30,48	20–24
25–29	1.784	14.805	442	0,222	6,80236	33,50	25–29
30–34	1.112	7.342	270	0,230	6,65857	27,19	30–34
35–39	706	4.166	145	0,225	6,33881	28,73	35–39
40–44	464	2.491	105	0,221	6,61811	23,72	40–44
45–49	255	1.812	58	0,218	7,69879	31,24	45–49
50–54	145	1.572	29	0,202	8,16632	54,21	50–54
55–59	63	608	14	0,159	6,27265	43,43	55–59
60–64	33	69	3	0,091	2,09091	23 —	60–64
15–64	9.244	58.924	1.922	0,208	6,37430	30,66	15–64

TAVOLA *E*.

Commercio di articoli per l'arredamento.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.450	3.908	185	0,128	2,69517	21,12	15–19
20–24	1.300	6.555	226	0,183	4,74738	29 —	20–24
25–29	1.203	8.487	302	0,235	6,42068	28,10	25–29
30–34	885	6.860	256	0,266	6,99920	26,80	30–34
35–39	649	5.412	198	0,260	6,89075	28,85	35–39
40–44	514	2.009	93	0,232	5,89858	21,60	40–44
45–49	344	2.279	79	0.230	5,44339	28,85	45–49
50–54	280	1.031	52	0,205	5,61031	19,83	50–54
55–59	205	1.147	39	0,228	7,72997	29,41	55–59
60–64	123	1.365	33	0,268	11,09756	41,36	60–64
15–64	6.953	39.053	1.463	0,210	5,61671	26,69	15–64

TAVOLA *E-1*.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.211	3.130	145	0,120	2,58464	21,59	15–19
20–24	953	3.614	152	0,173	4,24943	23,78	20–24
25–29	913	5.893	216	0,223	5,80886	27,28	25–29
30–34	693	5.137	197	0,249	6,55342	26,08	30–34
35–39	548	4.341	156	0,249	6,56860	27,83	35–39
40–44	449	1.885	82	0,226	5,89965	22,99	40–44
45–49	309	1.754	67	0,210	5,33637	26,18	45–49
50–54	254	989	51	0,206	5,52019	19,39	50–54
55–59	196	959	36	0,229	7,32278	26,63	55–59
60–64	119	1.269	32	0,269	10,66387	39,66	60–64
15–64	5.645	28.971	1.134	0,201	5,13215	25,55	15–64

TAVOLA *E-2*.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	239	778	40	0,167	3,25523	19,45	15–19
20–24	347	2.941	74	0,222	6,31506	39,74	20–24
25–29	290	2.594	86	0,279	8,39918	30,16	25–29
30–34	192	1.723	59	0,303	8,48918	29,20	30–34
35–39	101	1.071	42	0,315	8,61333	25,50	35–39
40–44	65	124	11	263	7,50226	11,27	40–44
45–49	35	525	12	0,243	9,28211	43,75	45–49
50–54	26	42	1	0,209	11,39240	42 —	50–54
55–59	9	188	3	0,232	17,33428	62,67	55–59
60–64	4	96	1	0,250	24,00000	96 —	60–64
15–64	1.308	10.082	329	0,252	7,70795	30,64	15–64

Tavola *F*.

Commercio di metalli, macchine, ecc.

Maschi e Femmine

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	2.227	7.787	321	0,144	3,49663	24,25	15–19
20–24	2.633	16.397	666	0,225	5,33866	24,62	20–24
25–29	3.144	21.334	942	0,288	6,73536	22,65	25–29
30–34	2.357	18.939	805	0,324	7,57408	23,53	30–34
35–39	1.692	13.941	616	0,321	7,81480	22,63	35–39
40–44	1.257	9.784	387	0,295	7,65356	25,28	40–44
45–49	964	6.933	195	0,261	7,21497	35,55	45–49
50–54	764	5.068	200	0,249	6,87876	25,34	50–54
55–59	494	3.105	120	0,251	6,91009	25,87	55–59
60–64	300	2.181	79	0,263	7,27000	27,61	60–64
15–64	15.832	105.469	4.331	0,274	6,66176	24,35	15–64

Tavola *F*-1.

Maschi

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.688	4.377	218	0,129	2,59301	20,08	15–19
20–24	1.711	9.073	426	0,217	4,61809	21,30	20–24
25–29	2.288	14.293	678	0,286	6,21912	21,08	25–29
30–34	1.914	15.487	660	0,323	7,17340	23,47	30–34
35–39	1.439	11.296	531	0,320	7,43716	21,27	35–39
40–44	1.109	7.530	327	0,290	7,25148	23,03	40–44
45–49	885	6.527	173	0,255	6,90266	37,73	45–49
50–54	723	4.618	187	0,245	6,64539	24,70	50–54
55–59	480	2.815	115	0,250	6,85996	24,48	55–59
60–64	290	2.170	77	0,266	7,48276	28,18	60–64
15–64	12.527	78.186	3.392	0,271	6,24140	23,05	15–64

Tavola *F*-2.

Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	539	3.410	103	0,191	6,32653	33,11	15–19
20–24	922	7.324	240	0,247	7,27073	30,52	20–24
25–29	856	7.041	264	0,292	8,10326	26,67	25–29
30–34	443	3.452	145	0,326	9,32337	23,81	30–34
35–39	253	2.645	85	0,340	10,08582	31,12	35–39
40–44	148	2.254	60	0,343	10,62718	37,57	40–44
45–49	79	406	22	0,330	10,99969	18,45	45–49
50–54	41	450	13	0,314	11,21818	34,62	50–54
55–59	14	290	5	0,269	8,10211	58 —	55–59
60–64	10	11	2	0,200	1,10000	5,50	60–64
15–64	3.305	27.283	939	0,284	8,25507	29,06	15–64

TAVOLA G.

Commercio di oggetti d'arte.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.564	5.871	246	0,157	3,75384	23,87	15–19
20–24	1.361	5.912	241	0,181	4,61574	24,53	20–24
25–29	1.275	6.921	255	0,201	5,35105	27,14	25–29
30–34	838	5.851	205	0,210	5,86352	28,54	30–34
35–39	661	3.615	136	0,202	5,92945	26,58	25–39
40–44	524	2.980	89	0,181	5,61979	33,48	40–44
45–49	402	2.489	67	0,169	5,45492	37,15	45–49
50–54	318	1.022	41	0,169	5,36706	24,93	50–54
55–59	237	1.718	52	0,180	5,72146	33,04	55–59
60–64	234	1.426	44	0,188	6,09402	32,41	60–64
15–64	7.414	37.805	1.376	0,186	5,09914	27,47	15–64

TAVOLA G-1

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.097	3.893	154	0,140	3,54877	25,28	15–19
20–24	832	2.745	135	0,172	4,09961	20,33	20–24
25–29	835	3.547	179	0,196	4,78072	40,15	25–29
30–34	565	4.298	133	0,204	5,51069	32,32	30–34
35–39	470	2.313	87	0,193	5,52140	26,59	35–39
40–44	386	1.983	67	0,172	5,17977	29,60	40–44
45–39	328	1.703	49	0,160	4,85783	34,76	45–49
50–54	274	924	33	0,163	4,95503	28 —	50–54
55–59	206	1.278	45	0,179	5,61573	28,40	55–59
60–64	213	1.395	42	0,197	6,54930	33,21	60–64
15–64	5.206	24.079	924	0,177	4,62524	26,06	15–64

TAVOLA G-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	467	1.978	92	0,197	4,23555	21,50	15–19
20–24	529	3.167	106	0,200	5,54897	29,88	20–24
25–29	440	3.374	76	0,211	6,37862	44,39	25–29
30–34	273	1.553	72	0,223	6,58302	21,57	30–34
35–39	191	1.302	49	0,226	7,17406	26,57	35–39
40–44	138	997	22	0,214	7,16295	45,32	40–44
45–49	74	786	18	0,211	7,97544	43,67	45–49
50–54	44	98	8	0,193	7,22367	12,25	50–54
55–59	31	440	7	0,160	5,48534	62,86	55–59
60–64	21	31	2	0,095	1,47619	15,50	60–64
15–64	2.208	13.726	452	0,205	6,21648	30,37	15–64

TAVOLA *H*.

Commercio di prodotti chimici e farmaceutici.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.158	3.473	166	0,143	2,99914	20,92	15–19
20–24	1.356	7.565	264	0,186	4,52858	28,66	20–24
25–29	1.467	8.382	343	0,220	5,60542	24,44	25–29
30–34	1.117	6.898	275	0,241	6,35763	25,08	30–34
35–39	804	5.467	202	0,243	6,59364	27,06	35–39
40–44	648	5.240	173	0,236	6,79725	30,29	40–44
45–49	500	2.353	88	0,217	6,34433	26,74	45–49
50–54	417	3.223	94	0,210	6,27548	34,29	50–54
55–59	278	1.645	53	0,208	6,22636	31,04	55–59
60–64	189	1.265	41	0,217	6,69312	30,85	60–64
15–64	7.934	45.511	1.699	0,176	5,73620	32,53	15–64

TAVOLA *H*-1.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	826	2.112	110	0,133	2,55690	19,20	15–19
20–24	852	3.704	161	0,176	3,69724	23,01	20–24
25–29	1.042	4.645	226	0,210	4,61547	20,55	25–29
30–34	844	4.589	198	0,235	5,51875	23,18	30–34
35–39	628	3.793	161	0,243	6,01838	23,56	35–39
40–44	547	4.384	151	2,240	6,55757	29,03	40–44
45–49	428	2.005	77	0,220	6,42819	26,04	45–49
50–54	385	3.114	88	0,211	6,62419	35,39	50–54
55–59	267	1.483	48	0,208	6,60124	30,90	55–59
60–64	179	1.228	39	0,218	6,86033	31,49	60–64
15–64	5.998	31.057	1.259	0,210	5,17789	24,67	15–64

TAVOLA *H*-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	332	1.361	56	0,169	4,09940	24,30	15–19
20–24	504	3.861	103	0,213	6,41809	37,49	20–24
25–29	425	3.737	117	0,244	8,02519	31,94	25–29
30–34	273	2.309	77	0,254	8,67980	29,99	30–34
35–39	176	1.674	41	0,236	8,44740	40,83	35–39
40–44	101	856	22	0,210	7,33103	38,91	40–44
45–49	72	348	11	0,217	6,94463	31,64	45–49
50–54	32	109	6	0,244	6,83502	18,17	50–54
55–59	11	162	5	0,249	6,21115	32,40	55–59
60–64	10	37	2	0,200	3,70000	18,50	60–64
15–64	1.936	14.454	440	0,227	7,46591	32,85	15–64

TAVOLA *I*.

Alberghi, trattorie, caffè, servizi igienici, sanitari, ecc.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	6.691	25.655	1.025	0,153	3,83425	25,03	15–19
20–24	8.133	46.852	1.860	0,206	5,14553	25,19	20–24
25–29	8.476	51.316	2.151	0,247	6,26493	23,86	25–29
30–34	7.175	52.684	2.000	0,269	7,07177	26,34	30–34
35–39	5.633	46.080	1.628	0,275	7,46453	28,30	35–39
40–44	4.670	34.501	1.270	0,269	7,46518	27,17	40–44
45–49	3.312	23.596	846	0,259	7,47242	27,89	45–49
50–54	2.352	16.631	560	0,254	7,70770	29,70	50–54
55–59	1.609	14.128	408	0,263	8,29572	34,63	55–59
60–64	963	8.627	273	0,283	8,95846	31,60	60–64
15–64	49.014	320.070	12.021	0,245	6,53017	26,63	15–64

TAVOLA *I-1*.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	5.155	19.899	838	0,163	3,86014	23,75	15–19
20–24	5.710	32.015	1.432	0,220	5,07484	22,36	20–24
25–29	6.263	37.115	1.682	0,263	6,14828	22,07	25–29
30–34	5.196	37.241	1.508	0,286	6,96028	24,70	30–34
35–39	3.892	31.712	1.220	0,293	7,42531	25,99	35–39
40–44	3.253	24.026	941	0,286	7,49197	25,53	40–44
45–49	2.474	18.188	678	0,273	7,56316	26,83	45–49
50–54	1.783	12.666	436	0,266	7,86178	29,05	50–54
55–59	1.284	11.410	328	0,279	8,62931	34,79	55–59
60–64	765	7.331	237	0,310	9,58301	30,93	60–64
15–64	35.775	231.603	9.300	0,260	6,47388	24,90	15–64

TAVOLA *I-2*.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.536	5.756	187	0,122	3,74740	30,78	15–19
20–24	2.423	14.837	428	0,167	5,28783	34,67	20–24
25–29	2.213	14.201	469	0,203	6,51997	30,28	25–29
30–34	1.979	15.443	492	0,226	7,33135	31,39	30–34
35–39	1.741	14.368	408	0,230	7,54206	35,22	35–39
40–44	1.417	10.475	329	0,226	7,37348	31,34	40–44
45–49	838	5.408	168	0,220	7,18863	32,19	45–49
50–54	569	3.965	124	0,218	7,16400	31,98	50–54
55–59	325	2.718	80	0,206	7,03313	33,97	55–59
60–64	198	1.296	36	0,182	6,54545	36 —	60–64
15–64	13.239	88.467	2.721	0,206	6,68230	32,51	15–64

TAVOLA *L*.

Attività ausiliarie del commercio.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.421	4.523	156	0,110	3,18297	28,99	15–19
20–24	1.625	5.938	212	0,138	3,75604	28,01	20–24
25–29	1.777	8.154	316	0,164	4,24762	25,80	25–29
30–34	1.334	6.119	255	0,177	4,56069	24 —	30–34
35–39	899	4.313	169	0,184	4,88759	25,52	35–39
40–44	680	3.304	107	0,183	5,03777	30,88	40–44
45–49	537	3.284	117	0,187	5,46105	28,07	45–49
50–54	428	1.862	72	0,185	5,93927	25,86	50–54
55–59	322	2.443	60	0,188	6,94932	40,72	55–59
60–64	224	1.823	43	0,192	8,13839	42,40	60–64
15–64	9.247	41.763	1.507	0,163	4,51638	27,71	15–64

TAVOLA *L*-1.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	982	2.898	105	0,110	2,95112	27,60	15–19
20–24	973	2.847	106	0,138	3,42141	26,86	20–24
25–29	1.195	5.281	226	0,167	3,96751	23,37	25–29
30–34	974	4.186	203	0,182	4,34672	20,62	30–34
35–39	702	3.546	131	0,188	4,72969	27,07	35–39
40–44	558	2.433	84	0,184	4,84459	28,96	40–44
45–49	463	2.639	103	0,190	5,34511	25,52	45–49
50–54	377	1.796	67	0,190	5,98656	26,81	50–54
55–59	298	2.316	58	0,194	7,11752	39,93	55–59
60–64	211	1.757	41	0,194	8,32701	42,85	60–64
15–64	6.733	29.699	1.124	0,167	4,41096	26,42	15–64

TAVOLA *L*-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	439	1.625	51	0,116	3,70159	31,86	15–19
20–24	652	3.091	106	0,249	4,39225	29,16	20–24
25–29	582	2.873	90	0,342	4,73609	10,84	25–29
30–34	360	1.933	52	0,362	5,07201	10,02	30–34
35–39	197	767	38	0,297	5,59449	20,18	35–39
40–44	122	871	23	0,218	5,92231	37,87	40–44
45–49	74	645	14	0,157	5,80007	46,07	45–49
50–54	51	66	5	0,131	4,90160	13,20	50–54
55–59	24	127	2	0,130	4,68839	63,50	55–59
60–64	13	66	2	0,154	5,07692	33 —	60–64
15–64	2.514	12.064	383	0,152	4,79873	31,50	15–64

Tavola *M*.

Gestioni diverse.

Maschi e Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	2.395	9.804	500	0,209	4,09353	19,61	15–19
20–24	1.859	11.463	539	0,267	5,74903	21,27	20–24
25–29	1.705	13.134	553	0,311	6,99466	23,75	25–29
30–34	1.361	10.382	466	0,336	7,59621	22,28	30–34
35–39	1.026	8.372	359	0,341	7,59749	23,32	35–39
40–44	771	5.881	276	0,334	7,20086	21,20	40–44
45–49	522	3.007	152	0,320	6,74522	19,78	45–49
50–54	360	2.366	111	0,317	6,81115	21,32	50–54
55–59	212	1.472	69	0,325	7,45996	21,33	55–59
60–64	138	1.185	47	0,341	8,58696	25,21	60–64
15–64	10.349	67.066	3.072	0,297	6,48043	21,83	15–64

Tavola *M*-1.

Maschi.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.088	2.972	185	0,170	2,73162	16,06	15–19
20–24	921	3.862	215	0,230	4,16749	17,96	20–24
25–29	978	5.982	288	0,285	5,48374	20,77	25–29
30–34	801	4.775	273	0,326	6,35715	17,49	30–34
35–39	653	5.200	237	0,345	6,85244	21,94	35–39
40–44	491	3.426	178	0,348	6,90847	19,25	40–44
45–49	363	2.101	113	0,343	6,99733	18,59	45–49
50–54	268	2.085	95	0,343	7,41380	21,95	50–54
55–59	164	1.334	58	0,338	7,98533	23 —	55–59
60–64	119	1.019	39	0,328	8,56302	26,13	60–64
15–64	5.846	32.756	1.681	0,288	5,60315	19,49	15–64

Tavola *M*-2.

Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.307	6.832	315	0,241	5,22724	21,69	15–19
20–24	938	7.601	324	0,223	7,42263	23,46	20–24
25–29	727	7.152	265	0,338	8,83068	26,99	25–29
30–34	560	5.607	193	0,346	9,28802	29,05	30–34
35–39	373	3.172	122	0,331	8,73428	26 —	35–39
40–44	280	2.455	98	0,301	7,73052	25,05	40–44
45–49	159	906	39	0,260	5,79086	23,23	45–49
50–54	92	281	16	0,249	5,86822	17,56	50–54
55–59	48	138	11	0,304	5,83380	12,55	55–59
60–64	19	166	8	0,421	8,73684	20,75	60–64
15–64	4.503	34.310	1.391	0,309	7,61936	24,67	15–64

Tavole di morbilità e frequenza per professioni. - 1931.

TAVOLA *AA*.

Viaggiatori e piazzisti.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	69	613	22	0,139	8,88406	27,86	15–19
20–24	407	1.670	63	0,177	7,21586	26,51	20–24
25–29	855	6.055	214	0,209	6,50516	28,29	25–29
30–34	866	6.093	199	0,226	6,62154	30,62	30–34
35–39	680	4.174	152	0,228	6,63735	27,46	35–39
40–44	527	4.186	129	0,219	6,24884	32,45	40–44
45–49	408	1.747	73	0,204	5,58877	23,93	45–49
50–54	311	1.410	62	0,168	5,66958	22,74	50–54
55–59	194	1.234	36	0,161	6,53937	34,28	55–59
60–64	97	795	18	0,185	8,19588	44,17	60–64
15–64	4.414	27.977	968	0,219	6,33826	28,90	15–64

TAVOLA *AA-1*.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	64	585	20	0,312	9,14062	29,25	15–19
20–24	393	1.596	60	0,210	7,21610	26,60	20–24
25–29	839	5.706	203	0,184	6,26124	28,10	25–29
30–34	852	5.673	192	0,220	6,19727	29,55	30–34
35–39	659	3.538	143	0,220	6,12807	24,74	35–39
40–44	518	3.833	120	0,181	5,79999	31,94	40–44
45–49	402	1.660	69	0,196	5,28996	24,06	45–49
50–54	306	1.330	59	0,191	5,54184	22,54	50–54
55–59	194	1.234	36	0,188	6,59706	34,28	55–59
60–64	94	795	18	0,191	9,45745	44,17	60–64
15–64	4.321	25.950	920	0,213	6,00555	28,21	15–64

TAVOLA *AA-2*.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	5	28	2	0,400	5,60000	14 —	15–19
20–24	14	74	3	0,434	4,48155	24,67	20–24
25–29	16	349	11	0,480	3,52708	31,73	25–29
30–34	14	420	7	0,449	3,18084	60 —	30–34
35–39	21	636	9	0,426	2,95126	70,67	35–39
40–44	9	353	9	0,399	2,81375	39,22	40–44
45–49	6	87	4	0,485	2,24144	21,75	45–49
50–54	5	80	3	0,600	1,60000	26,67	50–54
55–59	—	—	—	—	—	—	55–59
60–64	3	—	—	—	—	—	60–64
15–64	93	2.027	48	0,516	2,17957	42,23	15–64

TAVOLA *BB*.

Personale tecnico-amministrativo

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	3.141	16.980	646	0,206	5,40592	26,28	15–19
20–24	5.968	40.806	1.346	0,249	6,18479	30,32	20–24
25–29	6.391	43.239	1.579	0,265	6,68800	27,38	25–29
30–34	4.661	31.850	1.216	0,262	6,87034	26,19	30–34
35–39	3.229	23.080	837	0,247	5,74126	27,57	35–39
40–44	2.387	15.919	554	0,231	6,43324	28,73	40–44
45–49	1.745	9.524	370	0,211	6,09681	25,74	45–49
50–54	1.312	7.672	235	0,199	6,17067	32,65	50–54
55–59	903	5.704	169	0,205	6,38355	33,75	55–59
60–64	604	4.367	136	0,225	7,23013	32,11	60–64
15–64	30.341	199.141	7.088	0,234	6,56343	28,10	15–64

TAVOLA *BB-1*.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.391	6.643	286	0,206	4,77570	23,23	15–19
20–24	2.779	13.583	533	0,208	5,02150	25,48	20–24
25–29	3.473	18.316	748	0,216	5,37014	24,49	25–29
30–34	2.835	16.351	659	0,223	5,72394	24,81	30–34
35–39	2.177	13.984	519	0,226	5,89083	26,94	35–39
40–44	1.725	10.230	375	0,216	5,76905	27,28	40–44
45–49	1.388	7.047	289	0,201	5,58927	24,38	45–49
50–54	1.140	6.112	193	0,191	5,70453	31,67	50–54
55–59	831	5.040	148	0,199	6,23308	34,05	55–59
60–64	572	4.028	127	0,222	7,04196	31,72	60–64
15–64	18.311	101.334	3.877	0,212	5,53405	26,14	15–64

TAVOLA *BB-2*.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.750	10.337	360	0,206	5,90686	28,71	15–19
20–24	3.189	27.223	813	0,246	7,36341	33,48	20–24
25–29	2.918	24.923	831	0,276	8,24729	29,99	25–29
30–34	1.826	15.499	557	0,290	8,55212	27,83	30–34
35–39	1.052	9.096	318	0,285	8,39799	28,60	35–39
40–44	662	5.689	179	0,268	8,27869	31,78	40–44
45–49	357	2.477	81	0,256	8,22340	30,58	45–49
50–54	172	1.560	42	0,258	8,74643	37,14	50–54
55–59	72	664	21	0,269	9,54415	31,62	55–59
60–64	32	339	9	0,218	10,59375	37,67	60–64
15–64	12.030	97.807	3.211	0,267	8,13026	30,46	15–64

TAVOLA *CC*.

Personale addetto alla vendita.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	7.814	29.393	1.120	0,143	3,76158	26,24	15–19
20–24	9.424	44.800	1.820	0,177	4,53285	24,62	20–24
25–29	7.750	40.144	1.596	0,203	5,13293	25,15	25–29
30–34	5.226	30.739	1.165	0,217	5,50281	26,39	30–34
35–39	3.494	19.649	807	0,218	5,58363	24,35	35–39
40–44	2.584	14.260	562	0,206	5,33493	25,37	40–44
45–49	1.674	9.041	310	0,186	4,96606	29,16	45–49
50–54	1.207	4.258	175	0,169	4,53008	24,33	50–54
55–59	758	3.620	126	0,166	4,36344	28,73	55–59
60–64	494	2.132	85	0.172	4,31579	25,08	60–64
15–64	40.425	198.036	7.766	0,192	4,89885	25,50	15–64

TAVOLA *CC*-1.

MASCHI.

y	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	4.786	16.525	621	0,130	3,45278	26,61	15–19
20–24	5.606	23.487	1.083	0,172	4,11820	21,69	20–24
25–29	4.991	22.834	1.038	0,204	4,74845	22 —	25–29
30–34	3.470	19.860	775	0,222	5,26446	25,63	30–34
35–39	2.338	13.402	584	0,224	5,46275	22,95	35–39
40–44	1.855	10.028	400	0,209	5,24172	25,07	40–44
45–49	1.302	6.685	231	0,187	4,79690	28,94	45–49
50–54	992	3.473	152	0,169	4,33627	22,85	50–54
55–59	660	2.787	108	0,164	4,24383	25,81	55–59
60–64	444	1.955	74	0,167	4,40315	26,42	60–64
15–64	26.444	121.036	5.066	0,192	4,57707	23,89	15–64

TAVOLA *CC*-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	3.028	12.868	499	0,165	4,24967	25,79	15–19
20–24	3.818	21.313	737	0,186	5,21183	28,92	20–24
25–29	2.759	17.310	558	0,200	5,78120	31,02	25–29
30–34	1.756	10.879	390	0,208	5,92549	27,89	30–34
35–39	1.156	6.247	223	0,209	5,86893	28,01	35–39
40–44	729	4.232	162	0,200	5,63742	26,12	40–44
45–49	372	2.356	79	0,186	5,75741	29,82	45–49
50–54	215	785	23	0,173	5,55171	34,13	50–54
55–59	98	833	18	0,186	4,97730	46,28	55–59
60–64	50	177	11	0,220	3,54000	16,09	60–64
15–64	13.981	77.000	2.700	0,193	5,50747	28,52	15–64

TAVOLA *DD*.

Operai.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	24.891	74.132	3.216	0,129	2,97826	23,05	15–19
20–24	18.658	98.063	4.047	0,201	4,74299	24,23	20–24
25–29	17.777	114.386	4.923	0,257	6,17863	23,23	25–29
30–34	14.477	107.032	4.432	0,287	7,07599	24,15	30–34
35–39	11.283	90.578	3.468	0,293	7,49894	26,12	35–39
40–44	9.589	70.227	2.637	0,283	7,56172	26,63	40–44
45–49	7.209	54.346	1.959	0,274	7,67862	27,74	45–49
50–54	5.482	41.434	1.413	0,272	8,06537	29,32	50–54
55–59	3.944	34.313	1.076	0,284	8,94509	31,89	55–59
60–64	2.574	26.030	784	0,305	10,11267	33,20	60–64
15–64	115.884	710.541	27.955	0,241	6,13148	25,42	15–64

TAVOLA *DD*-1.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	21.286	61.399	2.778	0,130	2,88448	22,10	15–19
20–24	14.872	75.547	3.351	0,207	4,60428	22,54	20–24
25–29	14.832	91.929	4.257	0,268	6,04435	21,59	25–29
30–34	11.998	88.125	3.857	0,300	7,00159	22,85	30–34
35–39	9.109	73.519	2.959	0,307	7,51019	24,85	35–39
40–44	7.742	56.993	2.230	0,296	7,63894	25,56	40–44
45–49	6.077	47.204	1.727	0,285	7,78612	27,33	45–49
50–54	4.710	36.001	1.254	0,281	8,18936	28,71	50–54
55–59	3.499	30.410	971	0,295	9,15732	31,32	55–59
60–64	2.296	24.096	738	0,321	10,49477	32,65	60–64
15–64	96.421	585.223	24.122	0,250	6,06946	24,26	15–64

TAVOLA *DD*-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	3.605	12.733	438	0,121	3,53204	29,07	15–19
20–24	3.786	22.516	696	0,171	5,43337	32,35	20–24
25–29	2.945	22.457	666	0,207	6,82259	33,72	25–29
30–34	2.479	18.907	575	0,225	7,43750	32,88	30–34
35–39	2.174	17.059	509	0,227	7,45102	33,51	35–39
40–44	1.847	13.234	407	0,220	7,16354	32,52	40–44
45–49	1.132	7.142	232	0,215	7,10562	30,78	45–49
50–54	772	5.433	159	0,209	7,26606	34,17	50–54
55–59	445	3.903	105	0,194	7,30591	37,17	55–59
60–64	278	1.934	46	0,165	6,95683	42,04	60–64
15–64	19.463	125.318	3.833	0,197	6,43878	32,69	15–64

Tavole di morbilità e frequenza per regioni. - 1931.

TAVOLA *AAA*.

Piemonte.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	4.764	12.878	453	0,095	2,70319	28,43	15–19
20–24	4.050	17.540	648	0,125	3,60660	38,31	20–24
25–29	3.408	17.964	680	0,165	4,74327	26,42	25–29
30–34	2.524	17.924	595	0,198	5,68233	30,12	30–34
35–39	2.060	12.292	432	0,211	5,93787	28,45	35–39
40–44	1.601	8.583	324	0,201	5,59075	26,49	40–44
45–49	1.108	5.921	215	0,192	5,29995	27,54	45–49
50–54	901	4.064	147	0,194	5,58401	27,65	50–54
55–59	641	3.819	134	0,217	6,81341	28,50	55–59
60–64	375	3.285	95	0,253	8,76000	34,58	60–64
15–64	21.432	104.270	3.723	0,174	4,86515	28,01	15–64

TAVOLA *AAA*-1.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	3.299	7.652	295	0,089	2,31949	25,94	15–19
20–24	2.447	9.119	406	0,154	3,63973	22,46	20–24
25–29	2.104	9.858	467	0,202	4,83421	21,11	25–29
30–34	1.635	10.882	412	0,224	5,64068	26,41	30–34
35–39	1.354	8.622	308	0,223	5,83796	27,99	35–39
40–44	1.155	5.736	227	2,208	5,53650	25,27	40–44
45–49	876	4.826	177	0,197	5,28364	27,27	45–49
50–54	740	3.345	125	0,198	5,45644	26,76	50–54
55–59	558	3.172	116	0,221	6,52141	27,34	55–59
60–64	336	2.753	87	0,259	8,19345	31,64	60–64
15–64	14.504	65.965	2.620	0,181	4,54806	25,18	15–64

TAVOLA *AAA*-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.465	5.226	158	0,108	3,56724	33,08	15–19
20–24	1.603	8.421	242	0,172	5,21357	21,11	20–24
25–29	1.304	8.106	213	0,196	6,17292	38,06	25–29
30–34	889	7.042	183	0,201	6,56953	38,48	30–34
35–39	706	3.670	124	0,189	6,12670	29,60	35–39
40–44	446	2.847	97	0,186	5,70542	29,35	40–44
45–49	232	1.095	38	0,177	5,42242	28,82	45–49
50–54	161	719	22	0,177	6,48638	32,50	50–54
55–59	83	647	18	0,188	9,30625	35,94	55–59
60–64	39	532	8	0,205	13,64103	66,50	60–64
15–64	6.928	38.305	1.103	0,159	5,52901	34,73	15–64

TAVOLA *BBB*.

Liguria.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	2.255	8.947	271	0,120	3,96763	33,01	15–19
20–24	2.674	15.800	477	0,160	5,43968	33,12	20–24
25–29	2.604	17.427	497	0,192	6,76008	35,06	25–29
30–34	1.953	15.398	435	0,214	7,74398	35,40	30–34
35–39	1.454	13.391	344	0,222	8,32020	38,93	35–39
40–44	1.060	8.863	237	0,220	8,40579	37,40	40–44
45–49	797	6.481	164	0,214	8,48501	39,52	45–49
50–54	515	4.169	103	0,215	8,76284	40,48	50–54
55–59	378	3.746	86	0,227	9,42320	43,56	55–59
60–64	204	2.074	50	0,245	10,16667	41,48	60–64
15–64	13.894	96.296	2.664	0,192	6,93076	36,15	15–64

TAVOLA *BBB*-1.

MASCHI.

y	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.832	7.562	223	0,122	4,12773	33,91	15–19
20–24	1.811	9.881	326	0,166	5,31736	30,31	20–24
25–29	1.799	11.466	367	0,202	6,46987	31,24	25–29
30–34	1.372	10.553	328	0,226	7,49420	32,17	30–34
35–39	997	8.670	243	0,236	8,17981	35,68	35–39
40–44	758	6.666	185	0,234	8,45447	36,03	40–44
45–49	633	5.188	140	0,226	8,51391	37,06	45–49
50–54	421	3.468	89	0,226	8,89545	38,97	50–54
55–59	331	3.071	72	0,243	9,96055	42,65	55–59
60–64	177	2.054	49	0,277	11,60452	41,92	60–64
15–64	10.131	68.579	2.022	0,200	6,76922	33,92	15–64

TAVOLA *BBB*-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	423	1.385	48	0,113	3,27423	28,85	15–19
20–24	863	5.919	151	0,145	5,55146	39,20	20–24
25–29	805	5.961	130	0,171	7,35722	45,85	25–29
30–34	581	4.845	107	0,185	8,29127	45,28	30–34
35–39	457	4.721	101	0,187	8,61202	46,74	35–39
40–44	302	2.197	52	0,176	8,22780	42,25	40–44
45–49	164	1.293	24	0,178	8,64546	53,87	45–49
50–54	94	701	14	0,172	8,31996	50,07	50–54
55–59	47	675	14	0,132	6,05393	48,21	55–59
60–64	27	20	1	0,037	0,74074	20 —	60–64
15–64	3.763	27.717	642	0,171	7,36567	43,17	15–64

Tavola *CCC*.

Lombardia.

Maschi e Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	9.259	35.114	1.417	0,153	3,79242	24,78	15–19
20–24	8.255	54.344	1.969	0,220	5,69600	27,67	20–24
25–29	8.117	60.975	2.370	0,271	7,07322	25,73	25–29
30–34	6.349	50.273	1.942	0,297	7,78263	25,89	30–34
35–39	4.511	37.663	1.450	0,301	8,02118	25,97	35–39
40–44	3.442	27.528	999	0,288	8,03147	27,56	40–44
45–49	2.495	19.477	645	0,274	8,10623	30,20	45–49
50–54	1.777	14.324	457	0,273	8,51354	31,34	50–54
55–59	1.103	10.005	305	0,291	9,42442	32,80	55–59
60–64	685	7.321	221	0,323	10,68759	33,13	60–64
15–64	45.993	317.024	11.775	0,256	6,89288	26,92	15–64

Tavola *CCC*-1.

Maschi.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	7.119	23.077	1.006	0,141	3,24161	22,94	15–19
20–24	5.689	30.645	1.264	0,206	4,78324	24,24	20–24
25–29	6.073	36.043	1.652	0,258	6,04276	21,82	25–29
30–34	4.889	36.371	1.490	0,289	6,94488	24,41	30–34
35–39	3.601	27.678	1.135	0,297	7,39250	24,39	35–39
40–44	2.735	20.668	803	0,287	7,58062	25,74	40–44
45–49	2.084	15.727	534	0,273	7,73624	29,45	45–49
50–54	1.572	12.026	397	0,272	8,29803	30,29	50–54
55–59	994	8.833	276	0,293	9,53962	35,03	55–59
60–64	624	7.057	206	0,330	11,30929	34,26	60–64
15–64	35.380	218.125	8.763	0,248	6,16521	24,89	15–64

Tavola *CCC*-2.

Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	2.140	12.037	411	0,192	5,62477	29,29	15–19
20–24	2.566	23.699	705	0,259	8,32087	33,62	20–24
25–29	2.044	24.932	718	0,307	10,07841	34,72	25–29
30–34	1.460	13.902	452	0,320	10,42721	30,76	30–34
35–39	910	9.985	315	0,315	10,28095	31,70	35–39
40–44	707	6.860	196	0,299	10,00376	35 —	40–44
45–49	411	3.750	111	0,288	10,10251	33,78	45–49
50–54	205	2.298	60	0,275	9,71254	38,30	50–54
55–59	109	1.172	29	0,263	7,81774	40,41	55–59
60–64	61	264	15	0,246	4,32787	17,60	60–64
15–64	10.613	98.899	3.012	0,284	9,31867	32,83	15–64

Tavola *DDD*.

Veneto.

Maschi e Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	4.663	14.668	627	0,134	3,14561	23,39	15–19
20–24	4.172	22.194	844	0,182	4,35732	26,30	20–24
25–29	3.734	19.604	860	0,218	5,29024	22,80	25–29
30–34	2.866	15.745	680	0,238	5,90892	23,15	30–34
35–39	2.074	14.703	533	0,248	6,34712	27,59	35–39
40–44	1.567	10.500	395	0,248	6,48157	26,58	40–44
45–49	1.131	7.032	288	0,244	6,50763	24,42	45–49
50–54	857	5.249	180	0,241	6,74868	29,16	50–54
55–59	603	4.327	148	0,257	7,59155	29,24	55–59
60–64	388	3.444	111	0,286	8,87629	31,03	60–64
15–64	22.055	117.466	4.666	0,212	5,32605	25,17	15–64

Tavola *DDD*-1.

Maschi.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	3.739	10.675	485	0,130	2,85504	22,01	15–19
20–24	2.812	14.538	601	0,187	4,16238	24,19	20–24
25–29	2.795	14.359	683	0,227	5,16814	21,02	25–29
30–34	2.293	12.443	558	0,247	5,85994	22,30	30–34
35–39	1.660	11.708	441	0,256	6,35042	26,55	35–39
40–44	1.243	8.588	322	0,254	6,56339	26,67	40–44
45–49	951	5.883	244	0,250	6,62344	24,11	45–49
50–54	732	4.713	161	0,248	6,90820	29,27	50–54
55–59	529	3.864	133	0,267	7,72719	29,05	55–59
60–64	346	3.103	104	0,301	8,96821	29,84	60–64
15–64	17.100	89.874	3.732	0,218	5,25579	24,08	15–64

Tavola *DDD*-2.

Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	924	3.993	142	0,154	4,32143	28,12	15–19
20–24	1.360	7.656	243	0,124	5,05318	31,51	20–24
25–29	939	5.245	177	0,175	5,67745	29,63	25–29
30–34	573	3.302	122	0,199	6,05096	27,07	30–34
35–39	414	2.995	92	0,219	6,33330	32,55	35–39
40–44	324	1.912	73	0,219	6,10996	26,19	40–44
45–49	180	1.149	44	0,212	5,89106	26,11	45–49
50–54	125	536	19	0,194	5,79605	28,21	50–54
55–59	74	463	15	0,180	6,66101	30,87	55–59
60–64	42	341	7	0,167	8,11905	48,71	60–64
15–64	4.955	27.592	934	0,188	5,56852	29,54	15–64

Tavola *EEE*.

Emilia.

Maschi e Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	2.188	10.002	340	0,155	4,57130	29,42	15–19
20–24	1.958	12.179	409	0,195	6,04348	29,78	20–24
25–29	1.795	13.778	413	0,231	7,38925	33,36	25–29
30–34	1.336	11.108	388	0,262	8,29011	28,63	30–34
35–39	1.071	10.534	285	0,267	8,75434	36,96	35–39
40–44	892	7.515	253	0,261	8,55179	29,70	40–44
45–49	626	5.088	140	0,243	8,52108	36,34	45–49
50–54	451	3.360	101	0,236	8,99857	33,27	50–54
55–59	315	3.377	73	0,239	10,50326	46,26	55–59
60–64	233	2.916	59	0,253	12,51502	49,42	60–64
15–64	10.865	79.857	2.461	0,226	7,34993	32,45	15–64

Tavola *EEE*-1.

Maschi.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.617	6.840	245	0,152	4,23006	27,92	15–19
20–24	1.292	6.658	274	0,200	5,48533	24,30	20–24
25–29	1.303	9.740	313	0,237	6,79899	31,12	25–29
30–34	984	7.076	282	0,264	7,75448	25,09	30–34
35–39	778	7.661	207	0,269	8,50403	37,01	35–39
40–44	691	5.818	200	0,264	8,52652	29,09	40–44
45–49	509	4.224	117	0,247	8,72682	36,10	45–49
50–54	362	2.895	83	0,238	9,22649	34,88	50–54
55–59	283	3.103	65	0,237	10,51382	47,74	55–59
60–64	199	2.408	49	0,246	12,10050	49,14	60–64
15–64	8.018	56.423	1.835	0,229	7,03704	30,75	15–64

Tavola *EEE*-2.

Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	571	3.162	95	0,166	5,53765	33,28	15–19
20–24	666	5.521	135	0,198	7,39993	40,90	20–24
25–29	492	4.038	100	0,228	8,82819	40,38	25–29
30–34	352	4.032	106	0,257	9,68020	38,04	30–34
35–39	293	2.873	78	0,259	9,42255	36,83	35–39
40–44	201	1.697	53	0,247	8,48753	32,02	40–44
45–49	117	864	23	0,226	7,53965	37,57	45–49
50–54	89	465	18	0,229	7,88360	25,83	50–54
55–59	32	274	8	0,253	10,52486	34,25	55–59
60–64	34	508	10	0,294	14,94118	50,80	60–64
15–64	2.847	23.434	626	0,220	8,23112	37,43	15–64

TAVOLA *FFF*.

Toscana.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	2.482	9.927	422	0,170	3,99960	23,52	15–19
20–24	2.751	16.903	647	0,221	5,50698	26,13	20–24
25–29	2.849	19.367	790	0,261	6,63448	24,52	25–29
30–34	2.220	17.050	629	0,281	7,17428	27,11	30–34
35–39	1.601	12.277	506	0,288	7,24620	24,26	35–39
40–44	1.480	9.548	382	0,277	7,04297	24,99	40–44
45–49	1.087	7.772	306	0,271	7,23269	25,40	45–49
50–54	852	5.722	202	0,264	7,68541	28,33	50–54
55–59	619	5.968	178	0,268	8,42356	33,53	55–59
60–64	457	4.107	124	0,271	8,98687	33,12	60–64
15–64	16.398	108.641	4.186	0,255	6,62526	25,95	15–64

TAVOLA *FFF*-1.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.904	6.107	310	0,163	3,20746	19,70	15–19
20–24	1.928	11.474	471	0,224	5,09208	24,36	20–24
25–29	2.142	14.265	616	0,272	6,50649	23,16	25–29
30–34	1.718	13.361	510	0,294	7,17399	26,20	30–34
35–39	1.240	9.815	419	0,300	7,20179	23,42	35–39
40–44	1.176	7.213	307	0,284	6,86693	23,50	40–44
45–49	901	5.937	252	0,276	7,06174	23,56	45–49
50–54	736	4.869	176	0,270	7,64872	27,66	50–54
55–59	545	5.654	169	0,275	8,47708	33,46	55–59
60–64	407	3.635	112	0,275	8,93120	32,46	60–64
15–64	12.697	82.330	3.342	0,263	6,48421	24,63	15–64

TAVOLA *FFF*-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	578	3.820	112	0,194	6,60900	34,11	15–19
20–24	823	5.429	176	0,215	6,82340	30,85	20–24
25–29	707	5.102	174	0,230	6,99651	29,32	25–29
30–34	502	3.689	119	0,250	7,15512	31 —	30–34
35–39	361	2.462	87	0,247	7,51121	28,30	35–39
40–44	304	2.335	75	0,252	7,90177	31,13	40–44
45–49	186	1.835	54	0,242	7,85874	33,98	45–49
50–54	116	853	26	0,220	7,48877	32,81	50–54
55–59	74	314	9	0,216	7,86877	34,89	55–59
60–64	50	472	12	0,240	9,44000	39,33	60–64
15–64	3.701	26.311	844	0,228	7,10916	31,17	15–64

Tavola *GGG*.

Marche.

Maschi e Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	334	379	30	0,090	1,13473	12,63	15–19
20–24	402	1.328	63	0,138	2,36955	21,08	20–24
25–29	390	1.132	69	0,168	3,31452	16,41	25–29
30–34	288	1.260	60	0,179	3,82337	21 —	30–34
35–39	217	1.005	35	0,176	4,03952	28,71	35–39
40–44	221	644	34	0,170	3,88173	18,94	40–44
45–49	158	787	32	0,131	3,69412	24,59	45–49
50–54	96	249	13	0,151	3,09331	19,15	50–54
55–59	70	186	9	0,140	2,55072	20,67	55–59
60–64	76	142	10	0,132	1,86842	14,20	60–64
15–64	2.252	7.112	355	0,158	3,15808	20,03	15–64

Tavola *GGG*-1.

Maschi.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	267	299	24	0,090	1,11985	12,46	15–19
20–24	258	782	34	0,140	2,39524	23 —	20–24
25–29	280	931	59	0,175	3,31530	15,78	25–29
30–34	216	943	46	0,185	3,73405	20,50	30–34
35–39	158	624	26	0,181	3,92252	24 —	35–39
40–44	156	457	23	0,173	3,92482	19,87	40–44
45–49	128	709	26	0,165	3,81607	27,27	45–49
50–54	78	249	13	0,152	3,18548	19,15	50–54
55–59	58	89	5	0,142	2,56179	17,80	55–59
60–64	63	127	9	0,143	2,01587	14,11	60–64
15–64	1.662	5.210	265	0,159	3.13478	19,66	15–64

Tavola *GGG*-2.

Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	67	80	6	0,090	1,19403	13,33	15–19
20–24	144	546	29	0,126	2,26853	18,83	20–24
25–29	110	201	10	0,145	3,28026	20,10	25–29
30–34	72	317	14	0,160	4,04964	22,64	30–34
35–39	59	381	9	0,164	4,26217	42,33	35–39
40–44	65	187	11	0,177	3,76525	17 —	40–44
45–49	30	78	6	0,208	4,01943	13 —	45–49
50–54	18	—	—	0,219	4,23290	—	50–54
55–59	12	97	4	0,183	3,70470	24,25	55–59
60–64	13	15	1	0,077	1,15385	15 —	60–64
15–64	590	1.902	90	0,153	3,22373	21,13	15–64

Tavola *HHH*.

Umbria.

Maschi e Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	243	990	35	0,144	4,07407	28,29	15–19
20–24	280	2.302	84	0,225	5,73675	27,40	20–24
25–29	249	1.386	61	0,279	6,37077	22,72	25–29
30–34	220	1.729	73	0,305	6,77121	21,89	30–34
35–39	167	752	52	0,276	5,98544	14,46	35–39
40–44	135	1.229	35	0,242	6,63106	35,11	40–44
45–49	91	79	6	0,190	6,02161	13,17	45–49
50–54	73	1.005	21	0,181	6,37775	47,86	50–54
55–59	55	74	6	0,167	4,59595	12,33	55–59
60–64	37	95	6	0,162	2,56757	15,83	60–64
15–64	1.550	9.641	379	0,245	6,22000	25,44	15–64

Tavola *HHH*-1.

Maschi.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	178	958	30	0,169	5,38202	31,93	15–19
20–24	183	1.289	54	0,232	5,98833	23,87	20–24
25–29	167	909	41	0,280	6,17270	22,17	25–29
30–34	178	1.316	60	0,308	6,42505	21,93	30–34
35–39	129	641	46	0,287	5,74357	13,93	35–39
40–44	108	840	28	0,255	6,22384	30 —	40–44
45–49	79	79	6	0,207	5,74830	13,17	45–49
50–54	60	801	19	0,201	6,23600	42,16	50–54
55–59	49	74	6	0,198	4,86931	12,33	55–59
60–64	29	95	6	0,207	3,27586	15,83	60–64
15–64	1.160	7.002	296	0,254	6,03621	23,74	15–64

Tavola *HHH*-2.

Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	65	32	5	0,077	0,49200	6,40	15–19
20–24	97	1.013	30	0,192	4,92481	33,77	20–24
25–29	82	477	20	0,245	6,82420	23,85	25–29
30–34	42	413	13	0,256	7,98077	31,77	30–34
35–39	38	111	6	0,226	8,69019	18,50	35–39
40–44	27	389	7	0,213	11,65444	55,57	40–44
45–49	12	—	—	0,188	13,86672	—	45–49
50–54	13	204	2	0,180	15,66048	102,50	50–54
55–59	6	—	—	0,181	16,19940	—	55–59
60–64	8	—	—	0,200	16,70000	—	60–64
15–64	390	2.639	83	0,213	6,76667	31,80	15–64

Tavola *III*.

Lazio.

Maschi e Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	3.745	12.746	624	0,167	3,40347	20,43	15–19
20–24	3.797	19.128	942	0,228	4,74283	20,31	20–24
25–29	3.474	20.767	983	0,276	5,85353	21,13	25–29
30–34	2.638	18.573	844	0,303	6,60613	22,01	30–34
35–39	1.874	13.471	626	0,312	6,97713	21,52	35–39
40–44	1.503	10.466	435	0,309	7,09028	24,06	40–44
45–49	1.118	8.098	345	0,306	7,28940	23,47	45–49
50–54	761	5.341	232	0,299	7,43424	23,02	50–54
55–59	541	4.719	164	0,288	7,39507	28,77	55–59
60–64	353	2.456	94	0,266	6,95751	26,13	60–64
15–64	19.804	115.765	5.289	0,267	5,84554	21,89	15–64

Tavola *III*-1.

Maschi.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	2.841	9.982	450	0,158	3,51355	22,18	15–19
20–24	2.650	11.909	639	0,218	4,54601	18,63	20–24
25–29	2.590	14.440	691	0,270	5,61677	20,90	25–29
30–34	1.969	14.022	626	0,304	6,53930	22,40	30–34
35–39	1.406	10.518	502	0,319	7,06792	20,95	35–39
40–44	1.175	8.088	343	0,318	7,19444	23,58	40–44
45–49	904	6.856	286	0,314	7,29175	27,97	45–49
50–54	641	4.390	204	0,305	7,33284	21,52	50–54
55–59	490	3.885	145	0,295	7,47801	26,79	55–59
60–64	318	2.398	88	0,277	7,54088	27,25	60–64
15–64	14.984	86.488	3.974	0,265	5,772	21,76	15–64

Tavola *III*-2.

Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	904	2.764	174	0,192	3,05752	15,88	15–19
20–24	1.147	7.219	303	0,254	5,10388	23,80	20–24
25–29	884	6.327	292	0,292	6,33690	21,67	25–29
30–34	669	4.551	218	0,301	6,76512	20,88	30–34
35–39	468	2.953	124	0,290	6,66621	23,81	35–39
40–44	328	2.378	92	0,276	6,74498	25,85	40–44
45–49	214	1.242	59	0,277	7,82489	21,05	45–49
50–54	120	951	28	0,272	8,55506	33,96	50–54
55–59	51	834	19	0,241	6,77647	43,89	55–59
60–64	35	58	6	0,171	1,65714	09,67	60–64
15–64	4.820	29.277	1.315	0,273	6,07407	22,26	15–64

TAVOLA *LLL*.

Abruzzi.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	190	508	38	0,200	2,67368	13,36	15–19
20–24	219	664	37	0,206	3,17443	17,94	20–24
25–29	297	958	68	0,216	3,57049	14,09	25–29
30–34	200	1.072	51	0,224	3,82702	21,02	30–34
35–39	137	411	29	0,219	3,76657	14,17	35–39
40–44	125	360	25	0,206	4,06408	14,40	40–44
45–49	93	483	18	0,197	4,41827	26,83	45–49
50–54	58	359	11	0,209	5,52500	32,64	50–54
55–59	45	137	9	0,251	7,87353	15,22	55–59
60–64	25	295	8	0,320	11,80000	36,87	60–64
15–64	1.389	5.247	294	0,212	3,77754	17,85	15–64

TAVOLA *LLL*-1.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	152	455	37	0,243	2,99342	12,30	15–19
20–24	154	372	28	0,235	3,26746	13,29	20–24
25–29	237	751	58	0,238	3,66964	12,95	25–29
30–34	170	1.065	50	0,246	4,07709	21,30	30–34
35–39	106	335	23	0,236	4,07000	14,57	35–39
40–44	102	287	23	0,220	4,03579	12,48	40–44
45–49	77	447	15	0,202	3,97911	28,80	45–49
50–54	52	191	10	0,209	4,69420	19,10	50–54
55–59	39	88	7	0,252	7,42565	12,57	55–59
60–64	24	295	8	0,333	12,29167	36,87	60–64
15–64	1.113	4.286	259	0,233	3,85085	16,55	15–64

TAVOLA *LLL*-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	38	53	1	0,026	1,39474	53 —	15–19
20–24	65	292	9	0,083	2,41077	32,44	20–24
25–29	60	207	10	0,118	2,62751	20,70	25–29
30–34	30	7	1	0,116	2,24105	07 —	30–34
35–39	31	76	6	0,131	2,20770	12,67	35–39
40–44	23	73	2	0,136	5,23981	36,50	40–44
45–49	16	36	3	0,177	8,85734	12 —	45–49
50–54	6	168	1	0,236	10,70451	168 —	50–54
55–59	6	49	2	0,333	8,16667	24,50	55–59
60–64	1	—	—	—	—	—	60–64
15–64	276	961	35	0,127	3,48188	27,46	15–64

TAVOLA *MMM*.

Campania.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	2.008	3.497	179	0,089	1,74153	19,53	15–19
20–24	2.477	5.650	327	0,129	2,37697	17,28	20–24
25–29	2.609	7.750	448	0,163	3,06806	17,30	25–29
30–34	2.200	8.632	436	0,182	3,70018	19,80	30–34
35–39	1.661	7.558	332	0,188	4,11748	22,76	35–39
40–44	1.489	6.266	254	0,180	4,12985	24,67	40–44
45–49	1.091	4.552	202	0,170	4,04902	22,53	45–49
50–54	947	3.007	132	0,158	4,00696	22,78	50–54
55–59	682	3.142	104	0,156	4,31293	30,31	55–59
60–64	491	2.342	78	0,159	4,76986	30,03	60–64
15–64	15.655	52.396	2.492	0,159	3,34692	21,03	15–64

TAVOLA *MMM*-1.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	1.699	2.590	148	0,087	1,52443	17,50	15–19
20–24	1.840	3.825	240	0,154	2,24878	11,70	20–24
25–29	2.065	6.224	363	0,203	3,05287	13,89	25–29
30–34	1.758	6.954	357	0,226	3,74061	15,95	30–34
35–39	1.391	6.733	290	0,226	4,21029	20,28	35–39
40–44	1.286	5.158	212	0,209	4,17813	20,31	40–44
45–49	985	4.358	189	0,190	4,04790	21,57	45–49
50–54	879	2.712	120	0,171	3,87177	20,54	50–54
55–59	647	2.669	93	0,165	4,08504	25,66	55–59
60–64	475	2.128	74	0,164	4,48000	27,28	60–64
15–64	13.025	43.351	2.086	0,160	3,32829	20,78	15–64

TAVOLA *MMM*-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	309	907	31	0,100	2,93527	29,26	15–19
20–24	637	1.825	87	0,129	2,98642	20,98	20–24
25–29	544	1.526	85	0,151	3,08100	17,95	25–29
30–34	442	1.678	79	0,167	3,49263	21,24	30–34
35–39	270	825	42	0,169	3,59012	19,64	35–39
40–44	203	1.108	42	0,171	3,80895	26,38	40–44
45–49	106	194	13	0,178	4,62813	14,92	45–49
50–54	68	295	12	0,207	6,94854	24,58	50–54
55–59	35	473	11	0,234	10,11503	43 —	55–59
60–64	16	214	4	0,250	13,37500	53,50	60–64
15–64	2.630	9.045	406	0,154	3,43916	22,28	15–64

TAVOLA *NNN*.

Puglie.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	918	2.432	95	0,103	2,64924	25,60	15–19
20–24	865	3.010	165	0,181	3,77357	18,24	20–24
25–29	776	4.076	196	0,246	4,72056	20,80	25–29
30–34	623	3.676	204	0,292	5,43889	18,02	30–34
35–39	422	2.244	135	0,312	5,74250	16,62	35–39
40–44	350	2.320	108	0,311	5,89658	21,48	40–44
45–49	229	1.241	73	0,300	5,93557	17 —	45–49
50–54	210	1.220	56	0,281	6,21701	21,79	50–54
55–59	160	1.115	43	0,261	6,60620	25,93	55–59
60–64	100	712	24	0,240	7,12000	29,67	60–64
15–64	4.653	22.046	1.099	0,236	4,73802	20,06	15–64

TAVOLA *NNN*-1.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	765	1.648	67	0,088	2,15425	24,60	15–19
20–24	688	2.467	139	0,174	3,50888	17,75	20–24
25–29	659	3.185	155	0,245	4,58481	20,55	25–29
30–34	559	3.424	191	0,261	5,34422	17,92	30–34
35–39	378	1.961	123	0,282	5,62151	15,94	35–39
40–44	306	1.865	93	0,284	5,83143	20,05	40–44
45–49	214	1.232	72	0,305	5,96326	17,11	45–49
50–54	196	1.212	55	0,284	6,32041	22,04	50–54
55–59	153	1.018	37	0,365	6,78869	27,51	55–59
60–64	96	712	24	0,250	7,41667	29,67	60–64
15–64	4.014	18.724	956	0,238	4,66467	19,59	15–64

TAVOLA *NNN*-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	153	784	28	0,183	5,12418	28 —	15–19
20–24	177	543	26	0,214	5,08895	20,88	20–24
25–29	117	891	41	0,245	5,37919	21,73	25–29
30–34	64	252	13	0,260	5,92396	19,38	30–34
35–39	44	283	12	0,258	6,22974	23,58	35–39
40–44	44	455	15	0,220	5,51059	30,33	40–44
45–49	15	9	1	0,240	4,87929	9 —	45–49
50–54	14	8	1	0,450	7,56804	8 —	50–54
55–59	7	97	6	0,857	13,85714	16,17	55–59
60–64	4	—	—	—	—	—	60–64
15–64	639	3.322	143	0,224	5,19875	23,23	15–64

Tavola *PPP*.

Calabrie.

Maschi e Femmine

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	249	1.017	57	0,229	4,08434	17,84	15–19
20–24	209	1.690	84	0,409	7,22212	20,12	20–24
25–29	193	1.820	111	0,557	9,72718	16,40	25–29
30–34	143	1.949	116	0,645	11,23844	16,80	30–34
35–39	115	1.350	73	0,624	10,94479	18,49	35–39
40–44	78	767	43	0,573	10,85242	17,84	40–44
45–49	86	596	35	0,534	11,37040	17,03	45–49
50–54	54	929	33	0,565	13,37525	28,15	50–54
55–59	37	582	23	0,606	14,13874	25,30	55–59
60–64	31	422	20	0,645	13,61290	21,10	60–64
15–64	1.195	11.122	595	0,498	9,30711	18,69	15–64

Tavola *PPP*-1.

Maschi.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	220	887	51	0,232	4,03182	17,39	15–19
20–24	168	1.404	69	0,422	7,44583	20,35	20–24
25–29	174	1.724	105	0,583	10,16028	16,42	25–29
30–34	124	1.780	104	0,690	11,99404	17,12	30–34
35–39	91	1.125	64	0,685	11,88877	17,58	35–39
40–44	60	725	40	0,642	11,61603	18,12	40–44
45–49	75	542	33	0,584	11,49075	16,42	45–49
50–54	46	679	30	0,599	12,97138	22,63	50–54
55–59	35	549	21	0,634	14,03630	26,14	55–59
60–64	29	422	20	0,690	14,55172	21,10	60–64
15–64	1.022	9.837	537	0,525	9,62524	18,32	15–64

Tavola *PPP*-2.

Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	29	130	6	0,207	4,48276	21,67	15–19
20–24	41	286	15	0,314	5,65359	19,07	20–24
25–29	19	96	6	0,392	6,75071	16 —	25–29
30–34	19	169	12	0,423	7,20538	14,08	30–34
35–39	24	225	9	0,358	6,72698	25 —	35–39
40–44	18	42	3	0,291	8,41255	14 —	40–44
45–49	11	54	2	0,334	11,97433	27 —	45–49
50–54	8	250	3	0,587	15,62795	83,33	50–54
55–59	2	33	2	1,000	16,50000	16,50	55–59
60–64	2	—	—	—	—	—	60–64
15–64	173	1.285	58	0,335	7,42775	22,16	15–64

TAVOLA *QQQ*.

Sicilia.

MASCHI E FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	*x*
15–19	2.006	6.441	347	0,173	3,21087	18,56	15–19
20–24	1.773	10.411	476	0,252	5,26920	21,87	20–24
25–29	1.875	14.624	647	0,307	6,69304	22,60	25–29
30–34	1.404	10.160	486	0,331	7,41154	20,91	30–34
35–39	1.143	8.471	376	0,327	7,76983	22,53	35–39
40–44	987	8.588	320	0,309	8,05042	26,84	40–44
45–49	792	6.352	219	0,285	8,05438	29,82	45–49
50–54	649	5.355	175	0,288	8,62352	30,60	50–54
55–59	460	3.272	109	0,339	10,47901	30,02	55–59
60–64	256	3.566	113	0,441	13,89062	31,47	60–64
15–64	11.345	77.230	3.268	0,288	6,80740	23,63	15–64

TAVOLA *QQQ*-1.

MASCHI.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	*x*
15–19	1.423	5.232	287	0,202	3,67674	18,23	15–19
20–24	1.318	8.656	406	0,290	6,03877	21,32	20–24
25–29	1.445	13.204	583	0,253	7,71062	22,65	25–29
30–34	1.080	8.890	408	0,379	8,55621	21,79	30–34
35–39	845	7.358	333	0,379	9,00971	22,10	35–39
40–44	753	7.570	282	0,357	9,29175	26,84	40–44
45–49	641	5.934	204	0,326	9,19800	29,09	45–49
50–54	535	4.978	156	0,320	9,65959	31,91	50–54
55–59	399	3.927	103	0,371	11,57392	29,39	55–59
60–64	231	3.530	111	0,481	15,28139	31,80	60–64
15–64	8.670	68.379	2.873	0,331	7,88685	23,80	15–64

TAVOLA *QQQ*-2.

FEMMINE.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	*x*
15–19	583	1.209	60	0,103	2,07376	20,15	15–19
20–24	455	1.755	70	0,140	2,94819	25,07	20–24
25–29	430	1.420	64	0,165	3,47438	22,19	25–29
30–34	324	1.270	78	0,180	3,78236	16,28	30–34
35–39	298	1.113	43	0,165	3,75729	25,88	35–39
40–44	234	1.018	38	0,153	3,69825	26,79	40–44
45–49	151	418	15	0,133	3,48565	27,87	45–49
50–54	114	377	19	0,126	3,20896	19,84	50–54
55–59	61	245	6	0,105	2,39722	40,83	55–59
60–64	25	26	2	0,080	1,04000	13 —	60–64
15–64	2.675	8.851	395	0,148	3,30878	22,41	15–64

Tavola *RRR*.

Sardegna.

Maschi e Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	591	1.572	69	0,117	2,65990	22,78	15–19
20–24	551	2.098	103	0,195	3,82894	20,37	20–24
25–29	378	2.196	119	0,260	5,00163	18,45	25–29
30–34	254	1.165	73	0,304	6,10651	15,96	30–34
35–39	167	1.359	56	0,318	7,09464	24,07	35–39
40–44	149	1.415	38	0,219	7,11475	24,40	40–44
45–49	128	699	24	0,250	6,18360	29,12	45–49
50–54	112	421	22	0,211	4,87157	19,14	50–54
55–59	87	402	16	0,187	3,76109	25,12	55–59
60–64	54	157	10	0,185	2,90741	15,70	60–64
15–64	2.471	11.484	530	0,214	4,64751	21,67	15–64

Tavola *RRR*-1.

Maschi.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	453	1.188	47	0,104	2,62252	25,28	15–19
20–24	391	1.194	76	0,197	3,69147	15,71	20–24
25–29	282	1.686	93	0,268	4,78920	18,13	25–29
30–34	199	929	61	0,301	6,02141	15,23	30–34
35–39	140	994	45	0,298	7,17428	22,09	35–39
40–44	128	1.405	37	0,268	7,52858	37,97	40–44
45–49	109	654	21	0,233	6,67872	31,14	45–49
50–54	98	388	20	0,211	5,37024	19,40	50–54
55–59	73	375	15	0,203	4,11207	25 —	55–59
60–64	49	157	10	0,204	3,20408	15,70	60–64
15–64	1.922	8.970	425	0,221	4,66701	21,11	15–64

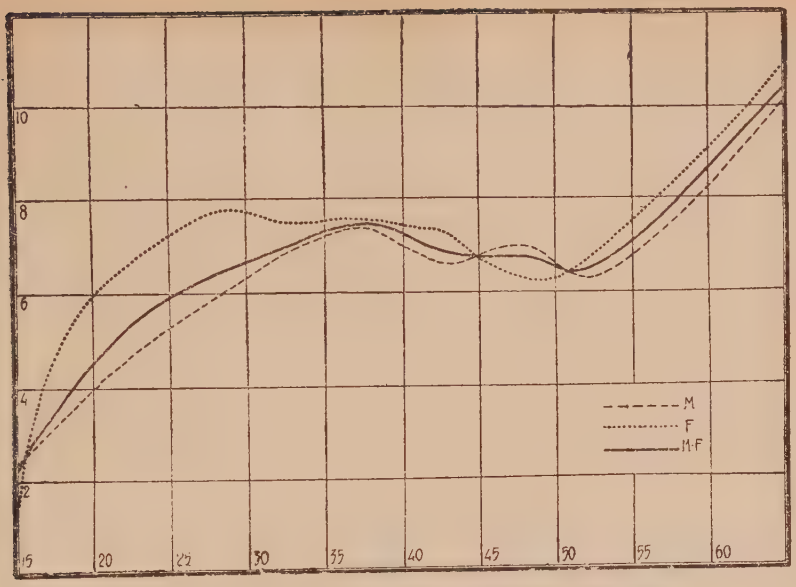
Tavola *RRR*-2.

Femmine.

x	E_x	n_x	c_x	f_x	z_x	δ_x	x
15–19	138	384	22	0,159	2,78261	17,45	15–19
20–24	160	904	27	0,193	4,14959	33,48	20–24
25–29	96	510	26	0,239	5,79116	19,62	25–29
30–34	55	236	12	0,247	6,29566	19,67	30–34
35–39	27	365	11	0,242	6,41897	33,18	35–39
40–44	21	10	1	0,181	4,42784	10 —	40–44
45–49	19	45	3	0,148	3,13545	15 —	45–49
50–54	14	33	2	0,104	1,96018	16,50	50–54
55–59	14	27	1	0,071	1,92857	27 —	55–59
60–64	5	—	—	—	—	—	60–64
15–64	549	2.514	105	0,191	4,57923	23,94	15–64

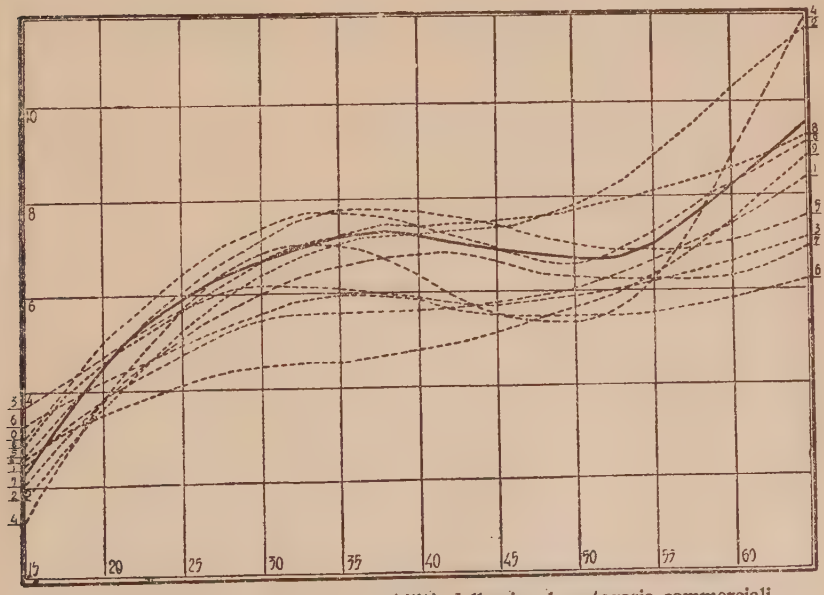
TAVOLE GRAFICHE

TAVOLA GRAFICA N. 1.



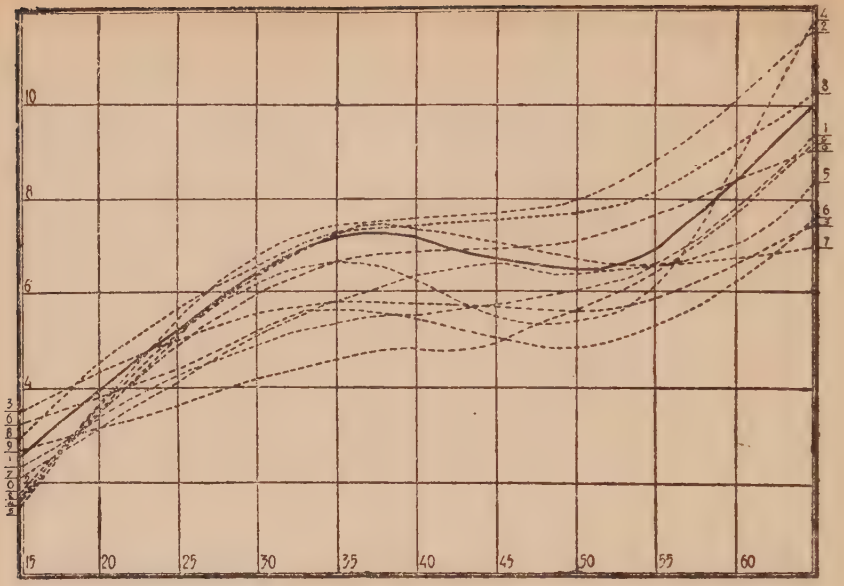
Coefficienti di morbilità per tutte le categorie commerciali.

TAVOLA GRAFICA N. 2.



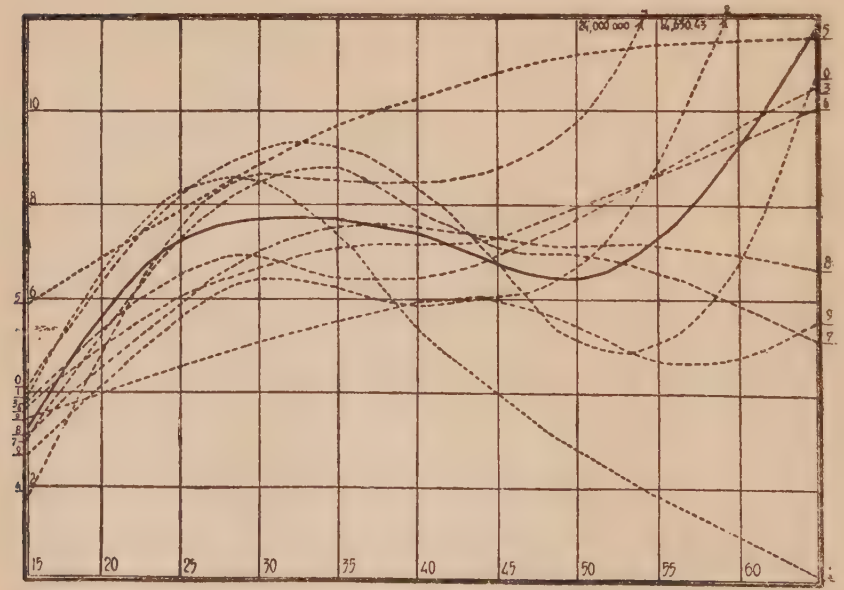
Confronto tra i coefficienti di morbilità delle singole categorie commerciali (maschi e femmine).

Tavola grafica N. 3.



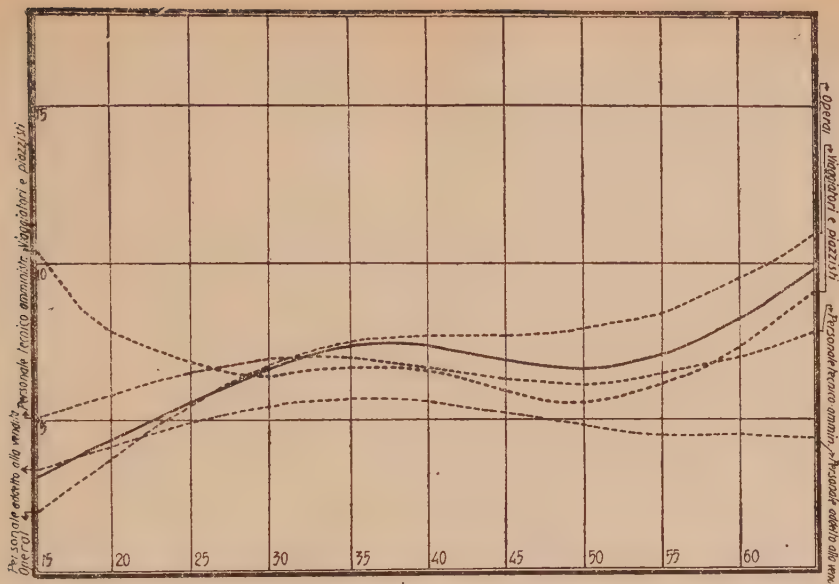
Confronto tra i coefficienti di morbilità delle singole categorie commerciali (maschi).

Tavola grafica N. 4.



Confronti tra i coefficienti di morbilità delle singole categorie commerciali (femmine).

Tavola grafica N. 5.

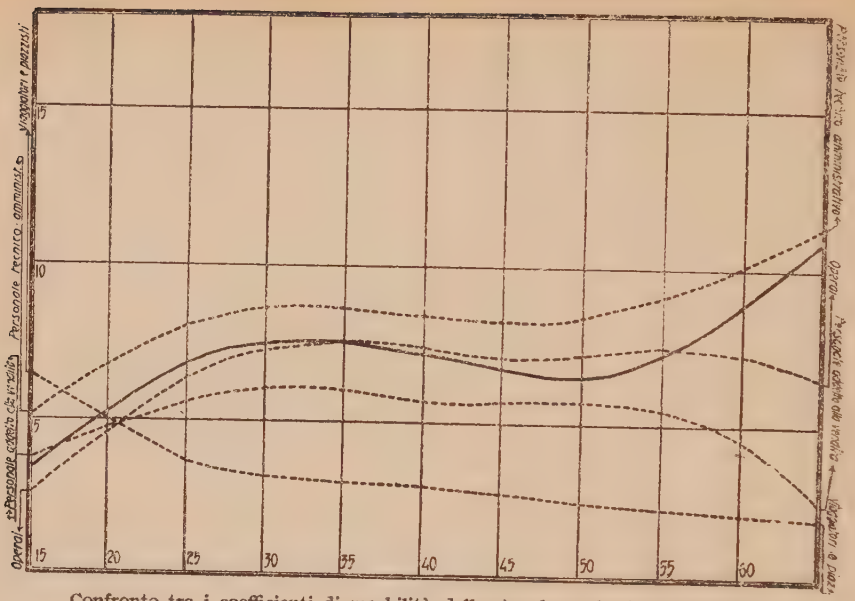


Confronto tra i coefficienti di morbilità delle singole professioni (maschi e femmine).

Tavola grafica N. 6.

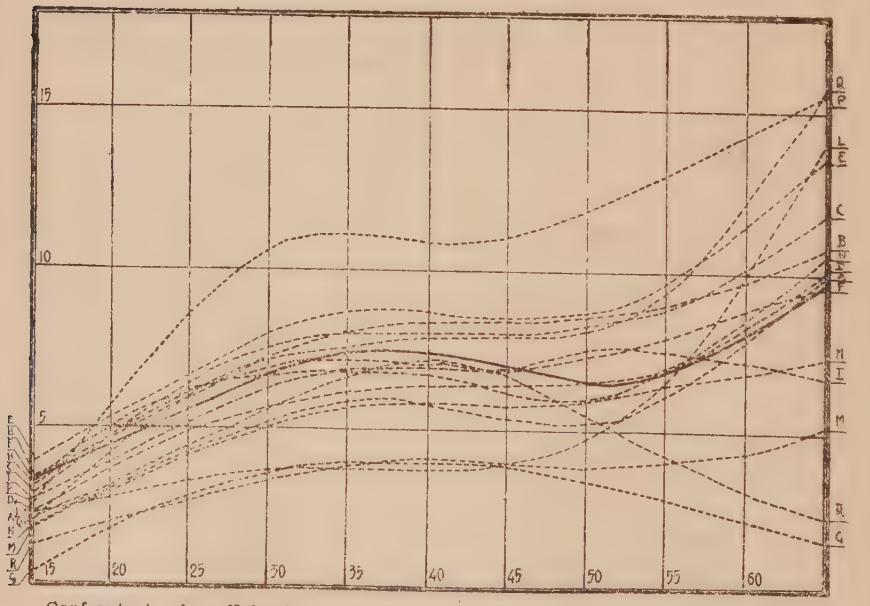
Confronto tra i coefficienti di morbilità delle singole professioni (maschi).

Tavola grafica N. 7.



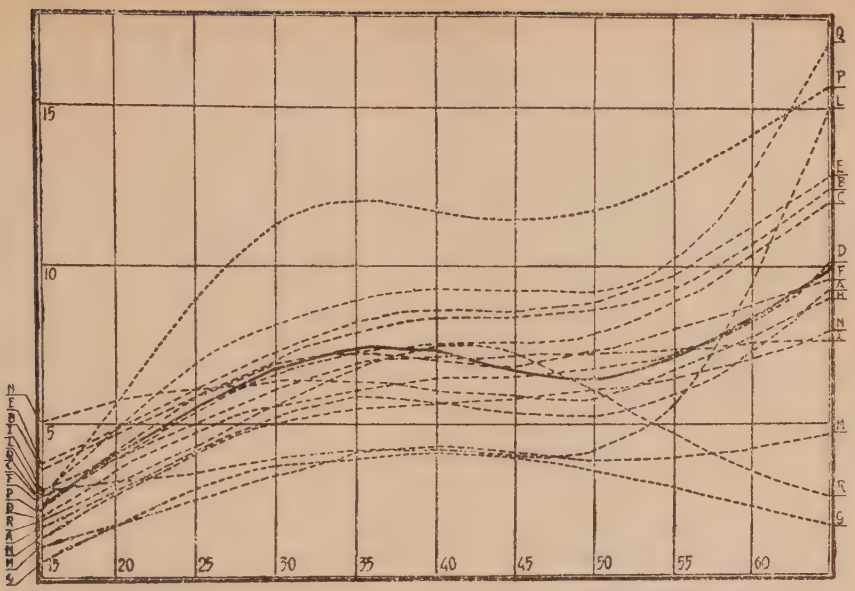
Confronto tra i coefficienti di morbilità delle singole professioni (femmine).

Tavola grafica N. 8.



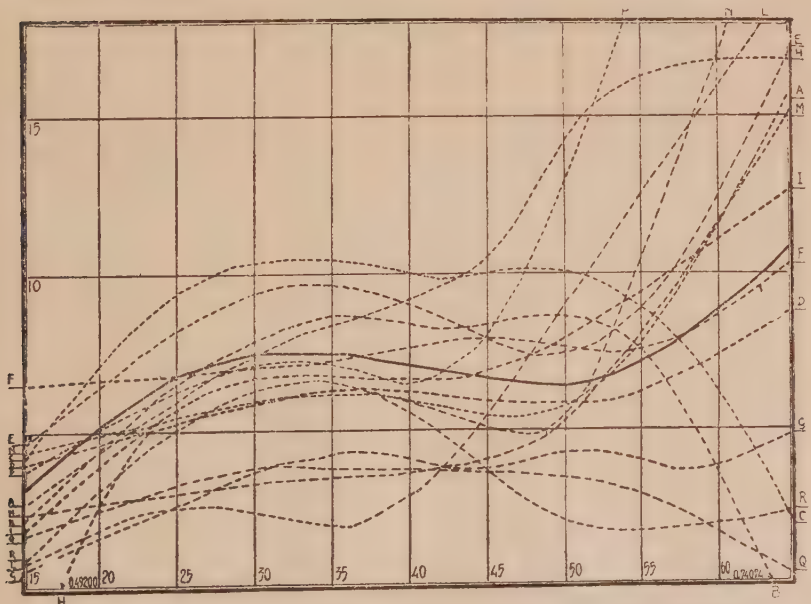
Confronto tra i coefficienti di morbilità delle singole regioni (maschi e femmine).

Tavola grafica N. 9.



Confronto tra i coefficienti di morbilità delle singole regioni (maschi).

Tavola grafica N. 10.



Confronto tra i coefficienti di morbilità delle singole regioni (femmine).

TAVOLA GRAFICA N. II.

Coefficienti di morbilità per i prestatori d'opera del commercio nelle singole regioni del Regno (1).

(1) *La distanza tra due spezzate consecutive misurate normalmente ai loro lati paralleli, è inversamente proporzionale ai coefficienti di morbilità regionali.*

Pubblicazioni ricevute. Publications reçues.
Publications received. Erhaltene Veröffentlichungen.

Periodici — Périodiques. Periodicals — Zeitschriften.

Agricoltura Razionale (L'). — Anno 1931 completo.
Alcuni indici della situazione Economica Italiana e del Lazio. — Anno 1931. Completo.
Amministrazione Locale (L'). — Anno 1931 completo.
Annali del Fascismo. — Anno 1931 : gennaio, febbraio, marzo, agosto, settembre, ottobre, novembre, dicembre.
Assicurazioni Sociali (Le). — Anno 1931 completo.
Assistenza Sociale nell'Industria (L'). — Anno 1931 completo.
Atti della R. Accademia dei Georgofili. — Anno 1931 completo.
Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. — Anno 1931-32. Tomo XCI, Disp. 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, 7ª, 8ª, 9ª, 10ª.

Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia Corporativa di Brescia. — Anno 1931 completo.
Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia Corporativa di Trieste. — Anno 1931 completo.
Bollettino del Consiglio Provinciale dell'Economia Corporativa di Udine. — Anno 1931 : n. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
Bollettino della Federazione Nazionale Fascista delle Imprese Assicuratrici. — Anno 1931 completo.
Bollettino delle Malattie Infettive del Regno (*Ministero dell'Interno*). Anno 1931 completo.
Bollettino Mensile della Societa delle Nazioni. — Anno 1931 completo.
Bollettino di Notizie Economiche. — Anno 1931 completo.
Bollettino Sanitario del Bestiame (*Ministero dell'Interno*). — Anno 1931 completo.
Bollettino Statistico Mensile Amministrativo del Comune di Firenze. — Anno 1931 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.
Bollettino Statistico Mensile per la Provincia di Milano. — Anno 1931 completo.
Bollettino Statistico del Ministero dei LL. PP. — Anno 1931 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12.

Casa e Lavoro. — Anno 1931 completo.
Commercio (*Confederazione Nazionale Fascista dei Commercianti*). — Anno 1931 completo.
Indici settimanali di Borsa (*Consiglio Provinciale dell'Economia Corporativa di Milano*). Anno 1931 : dal n. 1 al n. 11, dal n. 13 al n. 52.
Indici settimanali dei prezzi all'ingrosso : Anno 1931 : n. 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 51, 52.
Listino dei prezzi. Anno 1931 dal n. 1 al n. 10, dal n. 12 al n. 24, dal n. 26 al n. 52.
Numeri indici del mercato all'ingrosso. Anno 1931 : n. 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Dati mensili relativi all'esercizio delle FF. SS. — Anno 1931 completo.

Echi e Commenti. — Anno 1931 ; dal n. 1 al n. 33.
Economia. — Anno 1931 completo.
Esportatore Italiano (L'). — Anno 1931 completo.

Giornale di Agricoltura della Domenica. — Anno 1931 : dal n. 11 al n. 52.
Giornale di Bibliografia Tecnica Internazionale. — Anno 1931 : gennaio-febbraio, marzo-aprile, maggio-giugno, luglio-agosto, settembre-ottobre.
Giornale Economico (Il). — Anno 1931 completo.
Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica. — Anno 1931 completo.
Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari. — Anno 1931 completo.
Giornale di Matematica Finanziaria. — Anno 1931 completo.
Giornale di Medicina Militare. — Anno 1931 completo.

Industria Italiana delle Conserve Alimentari (L'). — Anno 1931 completo.
Italia che Scrive (L'). — Anno 1931 completo.

Lattante (Il). — Anno 1931 completo.

Marina Italiana (La). — Anno 1931 completo.
Mutualità Assicurativa. — Anno 1931 completo.

Notiziario Economico dell'Argentina (*Ambasciata Italiana in Buenos Aires*). — Anno 1931 completo.
Notiziario Economico-Commerciale del Brasile (*Ambasciata Italiana in Rio de Janeiro*). — Anno 1931, dal n. 85 al n. 94, dal n. 97 al n. 108.
Nuovi Studi di Diritto, Economia e Politica. — Anno 1931 completo.

Organizzazione Industriale (L'). — Anno 1931 completo.
Organizzazione Scientifica del Lavoro (L'). — Anno 1931 completo.

Prezzo corrente delle merci sulla Piazza di Livorno. — Anno 1931 completo.
Progresso Sociale del Mezzogiorno (Il). — Anno 1931 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11.
Proprietà Edilizia (La). — Anno 1931 : aprile, ottobre.

Rassegna Economica (*Banco di Napoli*). — Anno 1931 completo.
Rassegna Economica dell'Abruzzo Teramano. — Anno 1931 completo.
Rassegna della Previdenza Sociale. — Anno 1931 completo.
Rassegna Quindicinale dell'Agricoltura (*Banca Nazionale dell'Agricoltura*). — Anno 1931 completo.
Rassegna dell'U. S. I. L. A. (La). — Anno 1931 completo.
Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. — Anno 1931 : Vol. LXIV, fasc. 1-5, 6-10, 11-15, 16-18, 19-20.
Riforma Sociale (La). — Anno 1931 completo.
Rivista delle Assicurazioni. — Anno 1931 completo.
Rivista Bancaria. — Anno 1931 : n. 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
Rivista di Diritto agrario. — Anno 1931 completo.
Rivista del Diritto Commerciale. — Anno 1931 completo.
Rivista di Diritto Penitenziario. — Anno 1931 completo.
Rivista Internazionale del Cinema Educatore. — Anno 1931 completo.
Rivista Internazionale di Scienze e Discipline Ausiliarie. — Anno 1931 : novembre.
Rivista Mensile (*Banca Commerciale Italiana*). — Anno 1931 completo.
Rivista Mensile della Città di Trieste. — Anno 1931 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Rivista Mensile della Città di Venezia. — Anno 1931 completo.
Rivista di Politica Economica. — Anno 1931 completo.

Scientia. — Anno 1931 completo.
Somalia Italiana (La). — Anno 1931 completo.
Statistica del Commercio Speciale di Importazione ed Esportazione (*Ministero delle Finanze*). — Anno 1931 completo.
Studi Senesi. — Anno 1931 completo.

Vita Economica Italiana (La). — Anno 1931 completo.
Vita Italiana (La). — Anno 1931 completo.

Bibliographie d'Hygiène Industrielle (*Bureau International du Travail*). Année 1931 : n. 1, 2, 3.
Bulletin de la Banque Nationale de Roumanie. — Année 1931 complète.
Bulletin de la Banque Nationale de Tchécoslovaquie. — Année 1931 complète.
Bulletin de la Banque Nationale de Yougoslavie. — Année 1931 complète.
Bulletin d'Informations de l'Association de Défense Internationale contre les Stupéfiants. — Anno 1931 : janvier, février, mars, juillet.
Bulletin Mensuel de l'Institut International de Coopération Intellectuelle. — Année 1931 complète.
Bulletin Mensuel de l'Office Permanent (*Institut International de Statistique*). — Année 1931 complète.
Bulletin Mensuel de Statistique du Royaume de Bulgarie. — Année 1931 complète.
Bulletin Mensuel de Statistique de la Société des Nations. — Année 1931 complète.

Bulletin Mensuel de Statistique par la Statistique Générale de la Grèce. — Année 1931 : décembre.
Bulletin Officiel du Bureau International du Travail. — Année 1931 complète.
Bulletin de Statistique Agricole (*Institut International de Statistique*). — Année 1931 : ottobre, novembre.
Bulletin de la Statistique Générale de la France. — Année 1931 complète.

Chronique de la Sécurité Industrielle. — Année 1931 complète.

Epargne du monde (L'). — Année 1931 complète.

Hygiene du Travail (*Bureau International du Travail*). — Année 1931 : n. 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272.

Indices du Mouvement Général des Affaires en France et Divers Pays. — Année 1931 complète.
Informations Sociales (*Bureau International du Travail*). — Année 1931 : Vol. XXXVII n. 9, 10, 11, 12, 13 ; Vol. XXXVIII complet ; Vol. XXXIX complet ; Vol. XL complet.

Journal des Nations (*Société des Nations*). — Année 1931 : n. de 18 à 52, de 54 à 62, de 64 à 75, de 77 à 85, de 87 à 104, de 106 à 109.
Journal de la Société Hongroise de Statistique. — Année 1931 complète.
Journal de la Société de Statistique de Paris. — N. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12.

Matériaux pour l'Étude des Calamités. — Année 1931 : n. 25, 26, 27.
Le mouvement Syndical International. — Année 1931 : n. 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11.
Le Musée Social. — Année 1931 : complète.

Les Nouvelles Soviétiques. — Anno 1931 : juillet, août.
Moniteur Officiel du Commerce et de l'Industrie. — Année 1931 complète.

Rapport Epidemiologique (*Société des Nations*). — Année 1931 complète.
Rapports de l'Office de Statistique de la République Tchécoslovaque. — Année 1931 : n. de 1 à 28 ; de 30 à 99 ; de 101 à 116 ; de 118 à 133.
Relevé Hebdomadaire Epidemiologique (*Société des Nations*). — Année 1931, n. de 261 à 305.
Revue des Etudes Coopératives. — Année 1931 : avril-juin, juillet-septembre, octobre-décembre.
Revue de l'Institut International du Commerce. — Année 1931 : janvier-mars.
Revue de l'Institut de Sociologie Solvay. — Année 1931 complète.
Revue International du Travail. — Année 1931 : janvier, février, mars, avril, juin, juillet, août, septembre, octobre, novembre, décembre.
Revue Internationale de Sciences Administratives. — Année 1931 : janvier-mars, avril-juin, juillet-septembre.

Revue Trimestrielle de Statistique de la Republique Polonaise. — Année 1931 complète.

Série Legislative (*Bureau International du Travail*). — Année 1931 complète.
Statistique des Prix. — Année 1931 complète.

V. O. K. S. (*Bulletin d'Information de l'U. R. S. S.*). — Année 1931 n. 1, 2, 3, 7-9.

Annals of Mathematical Statistics (The). — Year 1931 complete.

Bank of Finland. — Year 1931 complete.
Births and Deaths. — Year 1931 complete.
Bulletin of Business Research. — Year 1931 complete.
Bulletin of Pan American Union. — Year 1931 complete.
Bulletin of Wool Manufactures. — Year 1931 complete.
Burroughs Clearing House. — Year 1931 complete.

Crops and Markets. — Year 1931 complete.

Ecology. — Year 1931 complete.
Economica. — Year 1931 complete.
Economic Journal. — Year 1931 nr. 163, 164.
Eugenics Review. — Year 1931: april, octobre.

Guaranty Trust Company. — Year 1931: complete.

Harvard Economic Society (Weekly Letters). — Year 1931 complete.
Human Biology. — Year 1931 complete.

Illinois Health Messenger. — Year 1931 complete.
Indian Journal of Economics. — Year 1931: july, octobre.
Industrial Bulletin (The). — Year 1931 complete.
International Cotton Bulletin. — Year 1931 complete.

Journal of the American Statistical Association. — Year 1931 complete.
Journal of Educational Research. — Year 1931: january, february, march, april, june, september, october, november.
The Journal of Political Economy. — Year 1931 complete.
Journal of the Royal Statistical Society. — Year 1931 complete.

Kyoto University Economic Review. — Year 1931 complete.
Labour Gazette. — Year 1931 complete.
London and Cambridge Economic Service. — Year 1931: Vol. IX bulletin nr. 2, Vol. X, bulletin n. 10, 11, 12.

Michigan Public Health. — Year 1931 complete.
Monthly Labor Review. — Year 1931 complete.

Monthly Report Department of Public Health of Toronto. — Year 1931 : april, september, october, november, december.
Monthly Vital Statistics. — Year 1931 : Vol. XII, april, may, june, july, august, september, october, december.

Official Year Book of the New South Wales. — Year 1930-31 complete.

Political Science Quarterly (The). — Year 1931 : nr. 2, 4.
Prices and Prices-Index (*Department of Trade and Commerce Dominion Bureau of Statistics.* — Ottawa). — Year 1931 complete.

Quarterly Journal of Economics. — Year 1931 : february, august, november.

Social Science Abstracts. — Year 1931 complete.
Special Bulletin State of New York. — Year 1931 : nr. 168, 169, 170, 171, 172.
Statistical Bulletin Metropolitan Life Insurance Company. — Year 1931 complete.
The Statistical Monthly. — Year 1931, january, february, march, may, june, july, august.
Statistical Register of the South Wales. — Year 1930-31, Part I, II, III, V.

Transactions Actuarial Society of America. — Year 1931 Vol. XXXII, Part one nr. 85.

Vitals Statistics Bulletin. — Year 1931 complete.

Allgemeines Statistisches Archiv. — Jahrgang 1931 : Band XXI, nr. 1, 2, 3.
Archiv für Soziale Hygiene und Demographie. — Jahrgang 1931 : Heft. 2, 3, 4, 6.
Archiv für Rassen und Gesellschafts-Biologie. — Jahrgang 1931 : Band XXIII, heft 3, Band XXV, heft. 4.

Berliner Wirtschaftsberichte. — Jahrgang 1931 wollständing.

Deutsches Statistisches Zentralblatt. — Jahrgang 1931 wollständing.

Monatliche Nachweise über den auswärtigen Handel Deutschlands. — Jahrgang 1931. vollständing.
Monatsbericht des Statistischen Amt der Stadt Berlin. — Jahrgang 1931 wollständing.

Weltwirtschaftliches Archiv. — Jahrgang 1931 : Band XXXIII heft nr. 2, Band XXXIV, heft nr. 1, 2.
Wirtschaft und Statistik. — Jahrgang 1931 wollständing.

Zeitschrift für Demographie und Statistik der Juden. — Jahrgang 1931 : n. 1, 2, 3.
Zeitschrift des Preussischen Statistischen Landesamts. — Jahrgang 1931 : heft nr. 1.
Zeitschrift für Schweizerische Statistik. — Jahrgang 1931 wollständing.

Boletim Hebdomadario de Estadistica Demographo-Sanitaria de Rio de Janeiro. — Année 1931 : n. de 1 à 47, de 49 à 52.

Boletim da Ispectoria de Servicos Geographicos. — Année 1931 : n. 3, 4, 6, 7, 8, 9.

Boletim do Istituto de Café. — Année 1931 complète.

Boletin de Estadistica. — Année 1931 complète.

Boletin de Higiene Escolar. — Anned 1931 : janvier-février, mars-avril, mai-juin, juillet-aout, septembre-octobre.

Boletin Mensal de Estatistica Agro-Pecuaria. — Année 1931 complète.

Boletin Mensal de Estadistica Demographo-Sanitaria de Cidade de Rio de Janeiro. — Année 1931 : janvier, février, mars, avril, mai, juin, juillet, août, septembre, octobre.

Bulletinul Statistic al Romăniei. — Année 1931 : n. 1, 2, 3.

Cenovè Zprávy (*Rapports sur les prix publiés par l'Office de Statistique de la Republique Tchécoslovaque*). — Année 1931 : n. 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 39, 40, 41, 42.

Commerce Extérieur de la Republique Polonaise. — Année 1931 complète.

El Comercio Exterior Argentino. — Année 1931 : n. 34, 35.

Cultura Venezolana. — Année 1931 : janvier, février-mars.

Direcion General de Sanidad (*Buletin hebdomadaire*). — Année 1931 : 31 janvier, 7, 14, 21, 28 février, 7, 14, 21, 28 mars, 4, 11, 18, 25 avril, 2, 9, 16, 30 mai, 6, 13, 20, 27 juin, 4, 11, 18, 26 juillet, 1, 8, 15, 22, 29 août, 5, 12, 19, 26 septembre, 3, 10, 17, 24, 31, octobre, 7, 14, 21, 28 novembre, 5, 12, 19, 26 décembre.

Lwów w Cyfrach (*Léopol en chiffres*). — Année 1931 complète.

Maandschrift van Het Centraal Bureau voor der Statistick (*S'Gravenhage*). — Année 1931 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Manedsopgaver over Vareomsetningen med Utlandet. — Année 1931 : janvier, février, mars, avril, juin, juillet, août, septembre, octobre, novembre, décembre.

La Medicina Argentina. — Année 1931 : n. 106.

Mesicni Prehled Zahranicniho Obchodn, Republiky Ceskoslovenske. — Année 1931 complète.

Revista de Ciencias Economicas. — Année 1931 : janvier, février, mars, mai, juillet, août, septembre, octobre, novembre, décembre.

Revista de Economia Argentina. — Année 1931 : n. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,

Revista Economica. — Année 1931 : février-mars, avril, mai, juin, juillet, septembre.

Secretaria de Hacienda y Credito Publico. — Année 1931, n. 8, 9, 10.

Statistische Meddelelser (*Oslo*). — Année 1931 : n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Statisticky Obzor (*Prague*). — Année 1931 complète.

I. A. Ulkomaankauppa (*Helsinski*). — Année 1931 complète.

Wiadomosci Statystyczne (*Informations statistiques de l'Office central de Statistique de la Pologne*). — Année 1931 complète.

Libri, Annuari, Opuscoli, Estratti, etc.

Livres, Annuaires, Brochures, Extraits, etc.

Books, Yearbooks, Pamphlets, Reprints, etc.

Bücher, Jahrbücher, Broschüren, Separatabdrücke, usw.

R. Accademia Economico Agraria dei Georgofili. — *La mezzadria nello Stato Fascista Corporativo.*

R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova. — *Celebrazione del II° Centenario dall'inizio delle Osservazioni Meteorologiche in Padova.* Padova, 1926.

Affricano Renato. — *I recenti movimenti dell'emigrazione italiana.* L'« Organizzazione industriale » marzo-aprile 1932. Roma.

Albertario Paolo. — *Contributo alla conoscenza delle condizioni economiche della produzione agraria nella zona del Piano irriguo del Naviglio Grande e del Naviglio Pavese nel sessennio* 1924-1929. Roma.

Id. — *Di alcuni aspetti del mercato fondiario postbellico nella bassa Lombardia.* Milano, 1928.

Albertario E. — *Il Possesso Romano.* Roma, 1932.

R. Ambasciata d'Italia in Buenos-Aires. — *Analisi dell'importazione argentina nel quinquennio* 1926-1930 *e quota dell'Italia.* Buenos Aires, 1931.

Annali di Statistica (Istituto Centrale di Statistica). Serie VI, Vol. XXII, XXIII, XXIV, XXV, XXVII, XXVIII, 1932.

Annali dell'Università di Camerino. Padova, 1931.

Arcari P. M. — *Obbligatorietà morale e obbligatorietà giuridica.* Roma, 1932.

Arnaldi M. — *Il contratto di assicurazione sulla vita studiato nella sua natura giuridica.* Macerata, 1910.

Id. — *Titoli circolari di credito e credito alberghiero.* Roma.

Associazione fra le Società Italiane per Azioni. — *L'economia italiana nel* 1930. Roma, 1931.

Id. — *Idem nel* 1931. Roma, 1932.

Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. — Settembre 1928. Bologna.

Atti dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni. Roma, 1932.

AVALLONE ALFREDO. — *Sull'organizzazione amministrativa della Città di Roma.* Roma, 1931.

BACHI RICCARDO. — *Gli scambi commerciali dell'Italia con l'estero nel* 1930. Roma, 1932.

BACHI ROBERTO. — *La struttura sociale e l'avvenire del popolo ebraico secondo Arturo Ruppin.* « La Rassegna Mensile di Israel », fasc. 7, 1931.

BALESTRIERI M. — *I consumi alimentari della popolazione italiana dal* 1910 *al* 1921. Padova, 1924.

BANCA COMMERCIALE ITALIANA. — *Movimento Economico dell'Italia.* Milano, 1932.

BANCA NAZIONALE DELL'AGRICOLTURA. — *Relazioni e bilancio al* 31 *dicembre* 1930.

BOLDRINI M. — *Rassegne critiche di demografia e biometria.* « Rivista Internazionale di Scienze Sociali e Discipline Ausiliarie » maggio-luglio 1931.

CALENDARIO DEL R. OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI ROMA, anno 1931, anno 1932. Roma, 1931.

CAMERA DEI DEPUTATI. — *Relazione della Giunta Generale del Bilancio sul disegno di legge presentato dal Ministro delle Finanze alla Presidenza il* 21 *aprile* 1929.

CASCIA RAFFAELE. — *Momenti della Colonizzazione in Sardegna nel secolo XVIII.* Bologna 1928.

CASSA NAZIONALE MALATTIE PER GLI ADDETTI AL COMMERCIO. — *Bilancio consuntivo della gestione* 1930-1931. Roma, 1932.

CASSOLA C. — *Scritti di economia e finanza raccolti da A. Graziani.* — Napoli, 1932.

CASTALDI LUIGI. — *Scritti biologici.* Siena, 1931.

CASTRILLI VINCENZO. — *Nuove indagini statistiche sugli studenti universitari.* Bari, 1929.

ID. — *La scelta professionale attraverso le statistiche universitarie.* Bari, 1927.

CATERINI F. — *Anomalie di colorazione in esemplari delle collezioni ornitologiche del Museo di Pisa.* Pisa, 1928.

ID. — *Anomalie teratologiche e dottrina delle mutazioni.* Milano, 1929.

ID. — *Anomalie teratologiche in uccelli.* Milano, 1928.

ID. — *I bovini fossili del Museo di Geologia della R. Università di Pisa.* Pisa, 1924.

ID. — *Catalogo dei Proboscidiani pliocenici e quaternari conservati nel Museo di Geologia dell'Università di Pisa.* Pisa, 1923.

ID. — *Cenni biologici sulla media Valle del Rio Guappero nel Monte Pisano.* Pisa, 1921.

ID. — *Contributo alla conoscenza della fauna di Vallebiaja (Colline Pisane).* Pisa, 1926.

ID. — *Mario Canavari.* Pisa, 1929.

ID. — *Le monografie delle Provincie d'Italia.* Torino, 1931.

ID. — *L'« orrido » di Botri (Appennino lucchese).* Pisa, 1926.

ID. — *Osservazioni ornitologiche.* « Natura » Vol. XIX. Milano, 1928.

ID. — *Polimorfismo della* Terebratula Aspasia Meneghini *nel Lias Italiano.* Pisa, 1919.

ID. — *Stazioni europee di anellamento di uccelli migratori.* Cremona, 1930.

CECCONI E. — *L'industria cotoniera italiana.* — Milano, 1926.
CESARI E. — *La produzione ed il consumo dell'energia in Italia nell'annata* 1931. Milano, 1932.
CIABATTI OMERO. — *Il nucleo laterale profondo di Edinger-Castaldi nel mesencefalo di alcuni mammiferi della fauna sarda.* Siena, 1931.
CIBRARIO L. — *I salari in Germania.* Roma, 1931.
CILIBERTI F. — *I creatori.* Milano, 1932.
CIPRIANI L. — *Su alcuni caratteri del cranio facciale degli antichi peruviani.* « Proceedings of the Twenty-Third International Congress of Americanists », September 1928.
ID. — *Aldobrandino Mochi.* « Liburni Civitas » n. 1, 1932. Livorno.
ID. — *Osservazioni antropometriche su indigeni asiatici e africani.* Firenze, 1932.
ID. — *Morbilità e mortalità per gravidanza tra le ricoverate ostetriche nella clinica « L. Mangiagalli » nel triennio* 1927-30.
ID. — *Nell'Uelé, sul luogo di sepoltura di Giovanni Miani.* Roma, 1931.
CITTÀ DI VICENZA. — *Annuario Statistico* 1929-1930.
COLLORIDI F. — *Rilievi statistici e considerazioni cliniche su morbilità e mortalità per causa ostetrica nella Clinica « L. Mangiagalli » della R. Università di Milano nel triennio* 1927-1930.
COMITATO ITALIANO PER LO STUDIO DEI PROBLEMI DELLA POPOLAZIONE. — *Le variazioni della popolazione, della natalità e della mortalità nei singoli comuni italiani dal* 1911 *al* 1921. — Memoria presentata dal Prof. L. GALVANI e dal Dr. ZANON al Congresso Internazionale per gli Studi della Popolazione. Roma, 1932.
COMMISSIONE REALE PER LA RIFORMA DEI CODICI. — *Codice civile* (Progetto e relazione). — *Codice marittimo* (Progetto). Roma, 1931.
CONFEDERAZIONE GENERALE FASCISTA DELL'INDUSTRIA ITALIANA. — *I prezzi e il costo della vita in Italia e all'estero nel marzo* 1932. Roma, 1932.
ID. — *I salari nominali e reali in Inghilterra.* Roma, 1932.
ID. — *I salari in Francia.* Roma, 1932.
ID. — *I salari negli Stati Uniti.* Roma, 1932.
CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA CORPORATIVA DI BRESCIA. — *Movimento economico della Provincia di Brescia nell'anno* 1930.
CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA CORPORATIVA DI MILANO. — *Rassegna di Borsa per l'anno* 1931.
CONSIGLIO PROVINCIALE DELL'ECONOMIA DI SASSARI. — *Economia e popolazione della Sardegna settentrionale.* Sassari, 1931.
CONSORZIO INDUSTRIE FIAMMIFERI. — *Nove anni dopo.* Pisa, 1932.
DEL VALLE G. — *Correlazioni tra dinamismo solare, economia idrica padana e prezzi del frumento.* — Estr. « Atti della XIX Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze ». Trento, 1930.
DE NOVELLIS L. — *L'economia dei Paesi del Levante Mediterraneo sotto mandato francese.* — Estr. « Rivista di Politica Economica ». Anno XXI, fasc. II e III. Roma, 1932.
DEVOTO L. — *Una disciplina italiana e i trenta anni del suo giornale.* Milano, 1932.
DI RENZO V. — *Movimento dei sinistri-incendio in Italia esaminato nelle denunzie.* Milano, 1931.

DRAGONI CARLO. — *I fattori della produzione. — La combinazione dei fattori produttivi. — L'esercizio dell'Impresa Agricola e i suoi risultati.* Milano, 1932.

E. N. I. T. — *Relazione sull'attività svolta nell'anno* 1930. Roma, 1931.

ID. — *Statistica del movimento turistico in Italia,* 1929. Roma, 1931.

ENTE GEORABDICO ITALIANO. — *Atti del Congresso* 1-3 agosto 1931.

FAVARO G. A. — *Nozioni di astronomia.* Barriera, 1931.

FEDERAZIONE NAZIONALE FASCISTA DELLE IMPRESE ASSICURATRICI. — *Annuario Italiano delle Imprese Assicuratrici* 1931. Vol. 1. Milano, 1931.

FEDERAZIONE NAZIONALE FASCISTA DELL'INDUSTRIA DEI PRODOTTI CHIMICI PER L'AGRICOLTURA. — *Annuario statistico dei prodotti chimici per l'agricoltura.* Roma, 1930.

FEDERAZIONE NAZIONALE FASCISTA DELLA PROPRIETÀ EDILIZIA. — *Il mercato edilizio.* Dati statistici 1927, 1928, 1929, 1930 e 1931.

FEDERAZIONE NAZIONALE FASCISTA DELLA PROPRIETÀ EDILIZIA. — *Sul piano regolatore di Sassari.* Roma.

FERRERI GIULIO. — *Indagine psicologica della sordità negli adulti.* Como, 1931.

FLORIS MICHELE. — *Sopra due casi di anencefalia.* Camerino, 1932.

ID. — *Sulla genesi dell'anencefalia.* Bologna, 1930.

FONDAZIONE MARCO BESSO. — *Il contributo dell'Italia nella guerra mondiale.* Roma, 1931.

FORTUNATI PAOLO. — *Quattro secoli di vita del popolo friulano* 1548-1931. Padova, 1932.

FRASSETTO F. — *Fondamenti e scopi della biometria.* Estr. « Arquivo da Repartiçao de Antropologia Criminal » Vol. I, fasc. 3°. 1931.

ID. — *Valori degli scostamenti tipico, bisestilico e sestilico nei poligoni binomiali.* Bologna, 1931.

FRUGONI CESARE. — *L'essenza e gli obbietti dell'insegnamento clinico.* Roma, 1932.

GALVANI L. — *Confronto tra le recenti tavole di mortalità italiane e quelle di altri paesi.* Roma, 1931.

ID. — *Dei limiti à cui tendono alcune medie.* Bologna, 1927.

ID. — *Una semplice proprietà delle serie di potenza ed applicazioni.* Bologna, 1911.

GENCO B. A. — *Proprietà edilizia e risparmio.* Estr. « La proprietà edilizia italiana » n. 11-12, 1931.

GENTILI A., PICCIOLI A. — *Studio sulla mortalità infantile in Pisa* 1919-1929. Pisa, 1931.

GIANNINI AMEDEO. — *Il riordinamento delle ammministrazioni centrali dello Stato.* Estr. « Educazione Fascista » anno X, n. 1-2, 1932. Roma.

ID. — *Studi di Diritto Commerciale Internazionale.* Roma, 1932.

ID. — *Il travaglio costituzionale dell'Europa contemporanea.* Roma, 1931.

GINI CORRADO. — *La politica della popolazione.* R. Università di Roma, 1928.

GRAZIANI AUGUSTO. — *Considerazioni sulla dottrina dei salari.* Napoli, 1932.

GRIXONI S. — *Sulla razione alimentare di pace e di guerra dei militari del R. Esercito e della R. Aeronautica.*

IN MEMORIA DI ALBERTO THOMAS. — Estr. « Informazioni sociali », maggio 1932.

INSOLERA FILADELFO. — *I nuovi fondamenti scientifici delle tavole di mortalità di assicurati e prime applicazioni biometriche e attuariali.* Torino, 1931.
ID. — *Sulla supermortalità dei rischi subnormali.* Torino, 1931.
ID. — *Su una proposta di riforma delle leggi per l'assicurazione contro gli infortuni.* Estr. « Giornale di Matematica Finanziaria », marzo 1932.
ISTITUTO CENTRALE DI STATISTICA. — *Compendio statistico* 1931.
ID. — *Elenco dei comuni del Regno e loro popolazione residente e presente al 21 aprile* 1931.
ID. — *Inaugurazione dell'Istituto Centrale di Statistica del Regno d'Italia.* Roma, 1926.
ID. — *Modifiche all'ordinamento dell'Istituto Centrale di Statistica del Regno.* Roma, 1929.
ID. — *Movimento della popolazione secondo gli atti di stato civile nell'anno* 1928 *e notizie sommarie per gli anni* 1929 *e* 1930. Roma, 1932.
ID. — *Regolamento interno.* Roma, 1931.
ID. — *Regolamento per il personale.* Roma, 1931.
ID. — *Statistica delle cause di morte nell'anno* 1928. Roma, 1932.
ISTITUTO NAZIONALE DELLE ASSICURAZIONI. — *Atti*, vol. IV — Roma 1932.
ID. — Idem, vol. III, *Conferenze di cultura assicurativa dell'anno 1930* — Roma 1931.
ID. — *Relazioni del R. Commissario e del Collegio dei Sindaci sul bilancio 1930.* Roma 1931.
ID, — *Relazioni del Consiglio di Amministrazione e del Collegio dei Sindaci sul Bilancio 1931* — Roma 1932.
ISTITUTO NAZIONALE DI ECONOMIA AGRARIA. — *Annali dell'Osservatorio di Economia Agraria di Bologna*, vol. II. Piacenza, 1932.
ISTITUTO NAZIONALE SVIZZERO DI ASSICURAZIONE CONTRO GLI INFORTUNI. — *Relazione annuale e conti del* 1930.
ID. — *Relazione annuale e conti del* 1931.
R. ISTITUTO ORIENTALE DI NAPOLI. — *Annuario scolastico pel* 1930-31. Napoli, 1930.
R. ISTITUTO SUPERIORE DI SCIENZE ECONOMICHE E COMMERCIALI DI VENEZIA. — *Relazione del Direttore Prof. Carlo Alberto dell'Agnola su l'anno accademico* 1930-31. Venezia, 1932.
KUMAR SARKAR BENOY. — *Il movimento industriale e commerciale nell'India moderna.* « Commercio » n. 6, 1931. Roma.
LA SORSA G. — *Indagini sulla mortalità delle società italiane per azioni.* Città di Castello, 1928.
ID. — *La ricchezza privata della Provincia di Venezia.* Padova, 1931.
LEGA ITALIANA PER LA LOTTA CONTRO IL CANCRO. — *Atti del secondo convegno nazionale* 1931. Bologna, 1931.
LENTI LIBERO. — *Una crisi nella crisi : l'Argento.* Estr. « Rivista di Politica Economica » fasc. IV, 1932.
ID. — *Le opinioni dell'Anderson sul « Gold Standard ».* Estr. « Rassegna Numismatica », n. 1, 1932.
LORIA A. — *Commemorazione di Camillo Supino.* Pavia, 1932.
LUTRARIO A. — *Come prolungare la vita umana.* — « Atti dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni », vol. IV. Roma, 1932.

LUZZATTO FEGIZ P. P. — *Il Consiglio d'amministrazione e l'interdipendenza delle imprese.* Città di Castello, 1929.

ID. — *La popolazione di Trieste.* Milano, 1931.

MAGNI E. — *Supplemento per l'anno X E. F. al repertorio generale tributario.*

MAJO ESTER. — *La conducibilità elettrica e l'indice di rifrazione dell'acqua marina nel Golfo di Napoli e mari adiacenti.* Napoli, 1931.

ID. — *I fenomeni geofisici flegrei susseguenti al terremoto irpino, del 23 luglio* 1930. Napoli, 1931.

ID. — *Il terremoto irpino del 23 luglio* 1930. Napoli, 1931.

MAJORANA S. — *Monopolii e aziende di Stato.* Roma, 1932.

MANETTI CUSA N. — *La redenzione economica.* — Roma, 1932.

MARANZANA G. R. — *Inghilterra* 1931. Crema, 1931.

ID. — *Saggio di commercio estero.* Crema, 1931.

MARIOTTI A. — *I turisti nord-americani in Italia.* Firenze, 1931.

MARRASSINI A. — *Osservazioni sugli eventuali rapporti tra fertilità della donna ed ampiezza dei diametri bitrocanterico e bisacromiale.* Estr. « Ateneo Parmense », Vol. IV, fasc. 4°, luglio-agosto 1932.

MASCI G. — *Il mercato a termine delle merci con speciale riguardo alle Borse dei cereali in Italia.* Estr. « Economia » n. 4, 1931.

MAZZARINO IGNAZIO. — *Note economiche e rilievi di alcuni problemi contemporanei.* Roma.

MAZZEI JACOPO. — *Le unioni doganali « aperte ».* Roma, 1931.

ID. — *I problemi della politica doganale coloniale del dopo-guerra.* Estr. « Rivista Internazionale di Scienze Sociali e Discipline Ausiliarie », maggio-luglio 1931. Milano, 1931.

MAZZOCCHI-ALEMANNI N. — *Corporativismo integrale.* Estr. « Il Sole » 21 agosto 1931.

MEZZANOTTE ANNA. — *Intorno a una questione di probabilità.* Estr. « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari » n. 3. 1931.

MINISTERO DELLE COLONIE. — *Rassegna economica delle Colonie,* Sommario del 1931.

MINISTERO DELL'AREONAUTICA. — *Statistica delle linee aeree civili italiane* 1930. Roma, 1931.

MINISTERO DELLE COMUNICAZIONI. — *Dati relativi all'anno* 1927 *sui servizi pubblici di trasporto.* Roma, 1931.

ID. (Direzione Generale delle Ferrovie dello Stato). — *Relazione per l'anno finanziario* 1930-31. Roma, 1931.

MINISTERO DELLE CORPORAZIONI. — *Annuario per le industrie chimiche e farmaceutiche* 1930. Roma, 1931.

ID. — *I salari nelle industrie negli anni* 1929 *e* 1930. Roma, 1931.

MINISTERO DELL'ECONOMIA NAZIONALE. — *Produzione dell'acciaio e importazione dei rottami.* Roma, 1926.

ID. — *Riordinamento del Servizio Statistico.* Roma, 1926.

ID. — *Statistica della produzione delle miniere. delle officine metallurgiche e mineralurgiche, delle torbiere e delle cave.* Roma, 1926.

MINISTERO DELLE FINANZE. — *Movimento commerciale del Regno d'Italia nel* 1929. Roma, 1932.

MINISTERO DELLE FINANZE. — *Statistica delle imposte di fabbricazione dal 1° luglio 1930 al 30 giugno 1931*. Roma, 1932.
MINISTERO DEI LAVORI PUBBLICI (Servizio Idrografico). — *Risorse idrauliche per forza motrice utilizzate e ancora disponibili : Bacini con foce al litorale della Campania*. Roma, 1932.
ID. — *Il servizio idrografico italiano*. Roma, 1931.
MOLINARI PIETRA MARIA. — *Gli umili*. Cividale, 1932.
MORTARA GIORGIO. — *Sulle modificazioni dei consumi*. « XIX Session de l'Institut International de Statistique ». Tokio, 1930.
ORESTANO F. — *La personalità etico-religiosa di Giorgio Washington*. Roma, 1932.
NORSA R. — *L'incidenza del costo dell'energia elettrica sulla produzione industriale*. 1925.
R. OSSERVATORIO ASTROFISICO DI CATANIA. — *Annuario* 1932. Barriera, 1931.
OTTOLENGHI DONATO. — *Ambiente rurale e tubercolosi in Italia* (Relazione). Bologna, 1931.
PALMIERI V. M. — *Osservazioni clinico-statistiche sulle donne che lavorano*. Estr. « Rassegna Internazionale di Clinica e Terapia ». Anno XI, n. 1, 1930.
ID. — *Statistiche nazionali e statistiche regionali sulla ripartizione dei gruppi sanguigni in Italia*.
ID. — *Vita sessuale Germanica*. — Estr. « Difesa sociale », n. 4, 1929.
P. N. F. — *Le origini e lo sviluppo del Fascismo dall'intervento alla marcia su Roma*. Roma, anno X.
PENDE NICOLA. — *La donna secondo la scienza delle secrezioni interne*. Genova, 1931.
PERINI DARIO. — *Sviluppo ed organizzazione degli uffici di contabilità agraria in Germania*. Roma, 1929.
PERONDI G. — *Come si possa migliorare la prognosi fetale nel parto podalico*. Roma, 1930.
PIERACCINI G. — *La donna nella conservazione e nel perfezionamento della specie*. Siena, 1931.
PIETRA G. — *Importanza sociale ed economica delle epidemie*. Padova, 1929.
ID. — *Lezioni di statistica*. Padova, 1931.
ID. — *L'oro*. Padova, 1931.
ID. — *Profili teorici delle prognosi economiche*.
ID. — *La ricchezza privata delle provincie delle tre Venezie*. Padova, 1928.
ID. — *Statistica*. — *Studi varii*, 1927-1929.
ID. — *Le variazioni dei prodotti agricoli in Italia*. Bologna, 1930.
PINGHINI C. — *La popolazione studentesca dell'Università di Ferrara dalle origini ai nostri tempi*. Padova, 1927.
PRESICCI NINO. — *Repertorio di norme del VII Censimento demografico*.
PUGLIESE S. — *Produzione salari e redditi in una regione risicola italiana*. — Milano.
QUETO P. — *Luigi Cadorna*. Sansevero, 1929.
RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO. — DELL'AGNOLA C. A. : *Sulla tendenza ad un limite di una successione di variabili causali*.
RENDICONTI DEL SEMINARIO MATEMATICO E FISICO DI MILANO. — Vol. V (1931). Milano, 1931.

REPACI F. A. — *Le finanze e la pressione tributaria del comune di Bari nell'ultimo secolo.* Bari, 1932.

ID. — *Le modificazioni al sistema tributario dei Comuni e delle Provincie.* Torino, 1931.

ID. — *L'ordinamento dell'imposta di famiglia.* Torino, 1931.

RICCI E. — *Saggio di una pianta etnografica della città di Tripoli di Barberia.* Firenze, 1931.

RICCI F. — *Il bilancio dello Stato e la crisi del* 1931 (discorso pronunciato al Senato il 5 giugno 1931).

ID. — *Per un giusto trattamento del titolo nominativo* (discorso pronunciato al Senato il 16 marzo 1932).

ID. — *Problemi economici del momento presente* (discorso pronunciato al Senato il 20 maggio 1931).

RIZZOLI LUIGI. — *Napoleone Bonaparte a Palazzo Polcastro ora De Benedetti.* Padova, 1930.

RUFFINI MARIO. — *Primati intellettuali della città di Torino.* Estr. « Torino », 1931.

SAVORGNAN F. — *Un nuovo spunto demografico nel censimento svedese del* 1920.

SCHEPIS G. — *Sunti di statistica industriale italiana* (anno accademico 1930-31).

SCUOLA SUPERIORE DI MALARIOLOGIA. — *Programma della Sezione Medica,* 1° luglio-30 settembre 1931. Roma, 1931.

SIMONCELLI D. — *Dal libero minatore alla grande intrapresa mineraria moderna.* Roma, 1932.

SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE. — *Programma della XIX Riunione.*

TARTARINI A. — *La vita e la scienza economica presso gli ateniesi.* Macerata, 1888.

TASSINARI G. — *Saggio intorno alla distribuzione del reddito nell'agricoltura italiana.* Piacenza, 1926.

TOSTI L. — *Principali caratteristiche del servizio merci sulle FF. SS.*

TRAVAGLINI V. — *Ricerche e note critiche sugli errori dei parametri della logistica e sugli errori della logistica stessa adattata alla popolazione italiana.* Padova, 1932.

TREMELLONI R. — *Se la razionalizzazione sia causa di disoccupazione.* Estr. « Rivista di Politica Economica » fasc. VII-VIII, 1931.

TROPEANO G. — *I minorenni anormali.* Napoli, 1932.

UGGÈ ALBINO. — *Di alcuni riflessi economici e sociali del futuro sviluppo della popolazione italiana.* (Memoria presentata al Congresso Internazionale della Popolazione). Roma, 1931.

ID. — *Il centro di popolazione dell'Italia nei nuovi confini.* Milano.

ID. — *La misura statistica della mobilità del lavoro.* Milano.

ID. — *Natalità differenziale secondo la religione e fattori demografici dello sviluppo numerico dei gruppi confessionali.* (Memoria presentata al Congresso Internazionale della Popolazione). Roma, 1931.

ID. — *A proposito di tipo antropologico e di scelta matrimoniale.* Città di Castello, 1929.

ID. — *Sulla rassomiglianza fra i coniugi per alcuni caratteri somatici.* Estr. « Contributi del Laboratorio di Statistica dell'Università Cattolica del S. Cuore ». Milano, 1931.

UNIONE STATISTICA DELLE CITTÀ ITALIANE. — *Convegno del Collegio Tecnico tenuto a Roma dal 30 al 31 marzo* 1925. Firenze, 1925.
R. UNIVERSITÀ « BENITO MUSSOLINI » DI BARI. — *Annali dell'Istituto di Statistica*. Vol. VIII.
R. UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA. — *Discorso pronunciato dal Rettore Magnifico on. Prof. Pietro De Francisci per l'inaugurazione dell'anno accademico* 1931-32.
ID. — *Scuola di Scienze Statistiche ed Attuariali*. Roma, 1931.
ID. — *Statuto*. Roma, 1931.
USA G. — *Matematica e poesia*. Catania, 1932.
ID. — *Relazione sull'anno accademico* 1930-31 (Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Catania). Catania, 1932.
U. S. I. L. A. — *Codice del Lavoro*. Roma, 1932.
VALENZANI C. — *La politica preferenziale britannica*. Milano, 1931.
VERGOTTINI M. — *I fenomeni demografici come base di quelli economici*. Trieste.
ID. — *Sul costo reale dei prestiti in valuta estera nel caso di rivalutazione monetaria*. Estr. « Economica », 1927.
ID. — *Sulla mobilità della popolazione norvegese*. Estr. « Annali » della R. Università di Trieste, 1931.
ID. — *Sviluppo demografico e migrazioni interne in Italia*. — Estr. « Bollettino Statistico Economico », Trieste, 1928.
VILLA MARIO. — *Sulle singolarità della Jacobiana di r + 1. I persuperficie dello spazio ad r dimensioni*. Milano, 1931.
WALTER LEONE. — *La tecnopsicologia del lavoro industriale*. Milano, 1931.
ACADEMIE DE DROIT INTERNATIONAL DE LA HAYE. — *Cours de* 1931. — *Rapport du Curatorium*. Parigi, 1931.
ALBERT THOMAS, 1878-1932. — *Annemasse (Haute-Savoie)*, 1932.
ANDRÉADES A. — *Les effets économiques et sociaux de la guerre en Grèce*. — 1928.
ID. — *Les finances de l'Empire japonais et leur évolution*. Paris, 1932.
ID. — *La population du Japon*. Bruxelles, 1931.
ANNUAIRE DU COMMERCE EXTÉRIEUR 1931 DE LA RÉPUBLIQUE POLONAISE. — I^ère Partie. Varsavia, 1932.
ANNUAIRE INTERNATIONAL DE STATISTIQUE. — Vol. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII. La Haye, 1916-1931.
ANNUAIRE STATISTIQUE DE FINLANDE 1931. — Helsinki 1931.
ANNUAIRE STATISTIQUE DES PAYS-BAS 1930. — S'Granenhage, 1931.
ASSOCIATION DES ANCIENS ÉLÈVES DU BUREAU D'ÉTUDES INTERNATIONALES. — Comprendre-Oxford.
BACHI RICCARDO. — *La statistique des prix des titres, du mouvement des affaires dans les bourses et des liquidations pour titres dans les chambres de compensation*. — XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.
BANQUE NATIONAL DE GRÈCE. — *Compte rendu des operations de l'année* 1931. Athènes, 1932.
BELA FOLDES. — *La statistique de la nationalité*. XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.
BOOCH MARC. — *Les caractères originaux de l'histoire rurale française*. Oslo, 1931.

BOWLEY A. L. — *L'étude des éléments statistiques les plus instructifs en vue des prévisions économiques à rassembler dans les principaux pays.* — XX Session de l'Institut International de Statistique. La Haye, 1930.

BUREAU INTERNATIONAL DU TRAVAIL. — *L'année sociale* 1931. Genève, 1932.

ID. — *L'assurance invalidité-vieillesse-décès.* Genève, 1932.

ID. — *Les aspects sociaux de la rationalisation.* Genève, 1931.

ID. — *Bibliographie d'hygiène industrielle.* Genève, 1931.

ID. — *Une enquête internationale sur les coûts de la vie.* Genève, 1931.

ID. — *Etudes sur les relations industrielles.* Genève, 1932.

ID. — *Hygiène du travail.* Genève, 1931.

ID. — *Les méthodes de la statistique des conflits du travail.* Genève, 1926.

ID. — *Les méthodes de la statistique des conventions collectives.* Genève, 1926.

ID. — *La quatrième conférence internationale des statisticiens du travail.* Genève, 1931.

ID. — *Recueil international de jurisprudence du travail* 1930. Genève, 1931.

ID. — *La réglementation du travail féminin.* Genève, 1931.

ID. — *La sécurité dans la production et l'utilisation de l'acétylène.* — Genève, 1931.

ID. — *La silicose.* Genève, 1930.

ID. — *Les statistiques des migrations.* Genève, 1932.

ID. — *Suppression des Bureaux de placement payants.* Genève, 1932.

BUREAU STATISTIQUE DE LA LETTONIE. — *Statistique de l'hygiène publique* 1930. Riga, 1931.

BUTLER H. B. — *Les problèmes du chômage aux Etats-Unis.* Genève, 1931.

CADOUX M. G. — *Développement des services publics urbains dans quelques Capitales d'Europe.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

CHALUPNY E. — *Précis d'un Système de Sociologie.* Paris, 1930.

COMMISSION POUR LA REVISION DES STATUTS. — *Prévision des Statuts.* XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.

CONFERENCE INTERNATIONALE DU TRAVAIL. — *L'âge d'admission des enfants au travail dans les professions non industrielles,* Genève, 1932.

ID. — *L'assurance invalidité-vieillesse-décès.* Genève, 1932.

ID. — *Revision partielle de la convention concernant la protection des travailleurs occupé au chargement ou au déchargement des bâteau contre les accidents.* — Genève, 1932.

CORNELISSEN. — *Théorie du salaire et du travail salarié.* Paris, 1908.

DARWIN L. — *Que est ce qu'est l'Eugénique ?* Paris, 1931.

DE FELLNER F. — *Le revenu national de la Hongrie actuelle.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

DELAISI FRANCIS. — *Les contradictions du monde moderne.* Paris, 1927.

DE LANNOY CH. — *La criminalité en Belgique avant et après la guerre.* Bruxelles, 1932.

ID. — *Note concernant l'établissement d'une statistique internationale des banques au subsidiairement des dépôts en banque.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

DE OLIVEIRA SALAZAR A. — *Stabilisation de la Monnaie.* Lisbona, 1931.

DIRECTION GÉNÉRALE DE LA STATISTIQUE DE BULGARIE. — *Résultats généraux du recensement de la popuation dans le royaume de Bulgarie au 31 décembre* 1926. Sofia, 1931.

ID. — *Mouvement de la population dans le royaume de Bulgarie.* Sofia, 1931.

ID. — *Statistique criminelle.* Sofia, 1931.

ID. — *Statistique de l'enseignement dans le royaume de Bulgarie, année solaire* 1930. Sofia, 1932.

GIUSTI U. — *Une nouvelle série de monographies de familles agricoles en Italie.* XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.

HISSENKOVEN P. — *L'Institut International du Commerce.* « Revue Economique Internationale », décembre 1931. Bruxelles, 1932.

HUBER M. — *Rapport sur l'uniformité dans le calcul des tables de mortalité.* XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.

INDOCHINE. — *Annuaire Statistique* 1930-31.

INSTITUT INTERNATIONAL D'AGRICULTURE. — *Acts de la 8ème Assemblée Générale.* Rome, 1926.

ID. — *Recueil de Statistique basée sur les données de la contabilité agricole.* 1927-28. Rome, 1931.

INSTITUT DE STATISTIQUE YANAGISAWA. — *Act de fondation — Statuts précis de travaux.*

JORDAN C. — *Sur une formule d'interpolation.* « Atti del Congresso Internazionale dei Matematici » 1928. Bologna.

JULIN A. — *Sur la méthode représentative en Statistique.* Louvain, 1932.

KEY HELMER. — *La vie économique de la Suède.* Paris, 1913.

KRZYZANOOWSKI A. — *L'aspect démographique de la crise économique contemporaine.* Crakow, 1932.

LATVIJAS STATISTISKA. *Annuaire statistique de la Lettonie* 1930. Riga, 1931.

ID. — *Récensement agricole en Lettonie en* 1929. Roma, 1932.

LIEU K. — *Le récensement de la Chine en* 1912. Institut International en 1912. Shanghai, 1931.

MARCH L. — *Forces actives et fiscalité en quelques pays.* — Supplément aux « Indices du Mouvement des Affaires ». 10 Année. Avril 1932. Paris.

ID. — *La statistique et le mouvement des affaires.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

MAUNIER RENÉ. — *Sociologie coloniale.* Paris, 1932.

METHORST H. W. — *Statistique des fonctionnaires.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1931.

MIRIMANOFF D. — *Lois de probabilité et polynomes d'Hermite.* Commentarii mathematici helvetici. Vol. 3. Genève, 1931.

MORET J. et FRISCH R. — *Méthodes nouvelles pour mesurer l'utilite marginale* Paris, 1932.

NOGARO BERTRAND. — *La question de l'or devant la Société des Nations.* « Revue d'Économie Politique » janvier-février 1931. Paris, 1931.

OFFICE GÉNÉRAL DE LA STATISTIQUE DE LA RÉPUBLIQUE POLONAISE. — *Le petit annuaire statistique de la Pologne,* II année. Varsovie, 1932.

OFFICE PERMANENT DE L'INSTITUT INTERNATIONAL DE STATISTIQUE. — *Renseignements sur l'organisation actuelle des statistiques de l'État Civil dans divers pays.* La Haye, 1929.

PIEKALKIEWICZ J. — *Le service statistique des Banques de Crédit Agricole Hypothécaire.* XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.

ID. — *Les travaux préliminaires sur les statistiques des finances publiques.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

ID. — *L'unification internationale de la statistique des transports sur les voies de navigation intérieure et maritime.* XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.

PIETRA G. — *Contributions à la méthodologie du calcul du rapport de concentration.* XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.

PINHEIRO DA FONSECA. — *Quelques aperçus sur le Brésil moderne.* Bruxelles, 1930.

PLATZER H. — *Rapport de la Commission pour la statistique des produits finis.* XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.

PRIBRAM H. — *Deuxième rapport sur l'uniformisation internationale des statistiques de l'habitation urbaine.* Madrid, 1931.

PTOUKHA M. — *La population de l'Ukraïne jusqu'en* 1960. XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

SAITO H. — *Sur la table de mortalité des Japonais n.* 4. XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

SAKAMOTO N. — *L'affaire de Mandchourie.* Paris, 1931.

SAKAMOTO A. et KOREN K. — *Etudes statistiques sur les effets eugéniques de la Guerre.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

SIMIAND F. — *Des possibilités de recherches statistiques historiques.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

SOCIÉTÉS DES NATIONS. — *Annuaire statistique* 1931-1932. Genève, 1932.

ID. — *Aperçu général du Commerce mondial* 1930. Genève, 1931.

ID. — *Aperçu de la production mondiale* 1925-1931. Genève, 1932.

ID. — *Balances des Paiements* 1930. Genève, 1932.

ID. — *Conférence Internationale du Travail.* Quinzième Session. Genève, 1931.

ID. — *Conference Internationale du Travail.* Seizième Session. Genève, 1932.

ID. — *Chiffres essentiels du Commerce extérieur des Pays Danubiens.* I^{ère} et 2ère séries. Genève, 1932.

ID. — *Conventions International pour la simplification des formalités douanières.* Genève, 1931.

ID. — *Convention pour la réglementation de la chasse à la baleine.* Genève, 1931.

ID. — *Le cours et les phases de la dépression économique mondiale.* Genève, 1931.

ID. — *La crise agricole.* Genève, 1931.

ID. — *Double imposition et évasion fiscale.* Vol. V. Genève, 1931.

ID. — *Ententes industrielles internationale.* Genève, 1931.

ID. — *Etablissement des réfugés bulgares :* 2ème, 22eme, 23ème, 24ème rapport du Commissaire de la Société des Nations en Bulgarie. Genève, 1932.

ID. — *Etudes de politique commerciale et de technique douanière. Méthodes d'application des tarifs spécifiques.*

ID. — *L'Imposition des entreprise étrangères et nationales.* Genève, 1932.

Sociétés des Nations. — *Mémorandum sur la production et le commerce :* 1925-1930. Genève, 1931.
Id. — *La mortalité dans les régions rurales de l'Europe.* Genève, 1931.
Id. — *Organisation d'Hygiène.* Genève, 1931.
Id. — *Le problème du bois.* Genève, 1932.
Id. — *Le problème du charbon.* Genève, 1932.
Id. — *Procéduve pour le règlement amiable entve Etats des différences d'ordre économique.* Genève, 30 janvier 1932.
Id. — *Protocole autrichien.* Genève, 15 juillet 1932.
Id. — *Rapport au Conseil sur les travaux de la* 37ème *session* (Comité économique). Genève, 20 janvier 1932.
Id. — *Rapport au Conseil sur les travaux de la* 38ème *session* (Comité économique). Genève, 9 juin 1932.
Id. — *Rapport du Comité financier sur les travaux de la* 45ème *session.* — Appendices sur la Bulgarie. Genève, 11 avril 1932.
Id. — *Rapport au Conseil sur les travaux de la* 42ème, 44ème, 45ème *et* 46ème *session du Comité financier.* Genève, 14 septembre 1931, 28 janvier, 29 mars, 6 juillet, 1932.
Id. — *Rapport de la délégation de l'or, du Comité financer.* Genève, 1932.
Id. — *Situation financière de l'Autriche pendant le dernier trimestre de* 1931. *Premier rapport trimestriel.* Genève, 12 janvier 1932.
Id. — *Situation financière de l'Hongrie pendant le dernier trimestre de* 1931. — *Premier rapport trimestriel.* Genève, 12 janvier 1932.
Id. — *Statistique du commerce extérieur* 1930. Genève, 1932.
Id. — *Statistique démographique officielles du Royaume d'Italie.* Genève, 1928.
Statistique du Royaume de Bulgarie. — *Mouvement de la population dans le Royaume de Bulgarie.* Sofia, 1931.
Id. — *Résultats généraux du recensement de la population dans le Royaume de Bulgarie au* 31 *décembre* 1931. Sofia, 1932.
Id. — *Statistique du commerce du Royaume de Bulgarie avec les pays étrangères en* 1930. Sofia, 1932.
Id. — *Statistique des coopératives dans le Royaume de Bulgarie en* 1929. Sofia, 1931.
Id. — *Statistique criminelle.* Sofia, 1931.
Id. — *Statistique de l'enseignement dans le Royaume de Bulgarie* 1929-30. Sofia, 1932.
Statistique générale de la France. — *Annuaire statistique* 1929. Paris, 1930.
Id. — *Idem* 1930. Paris, 1931.
Id. — *Résultats statistiques du recensement général de la population.* 7 mars 1926. Paris, 1931.
Statistique de la Pologne. — *Analyse des résultats du recensement des logements du* 30-9-1931. Warszawa, 1932.
Id. — *Annuaire du Commerce extérieur de la République Polonaise et de la ville libre de Dantzig,* II partie. Warszawa, 1932.
Id. — *Deuxième recensement général de la population du* 9-XII-1932. Warszawa 1932.
Id. — *Les régions de céréals en Pologne.* Warszawa, 1932.
Id. — *Statistique agricole* 1930-31. Warszawa, 1932.

STATISTIQUE DE LA POLOGNE. — *Statistique des finances communales.* Warszawa, 1931.

STATISTIQUE TCHÉCOSLOVAQUE. — *Commerce extérieur de la République Tchécoslovaque en* 1930. Prague, 1931.

ID. — *Etudes géophysiques faites à Prague : IV. Une analyse nouvelle des valeurs numériques relatives des taches salaires d'après la méthode de Schuster.* Prague, 1930.

ID. — *Etudes goéophysiques faites à Prague : V. La betterave à sucre en Bohème.* Prague, 1930.

ID. — *Résultats préliminaires du recensement de la population dans la République tchécoslovaque du* 1er *décembre* 1930. Prague, 1931.

SZTURM DE SZTREM T. — *La nouveile méthode de calculer l'indice du coût de la vie.* Warszawa, 1932.

TARDE G. — *Les lois de l'imitation.* Paris, 1921.

ID. — *L'opposition universelle.* Paris, 1897.

THIRRING L. — *Esquisse de l'accroissement de la population de la Hongrie d'avant et d'après la guerre et quelques propriétés caractéristiques des fluctuations du nombre des habitants.* Budapest, 1931.

ID. — *Exposé des travaux de la Commission pour la Statistique des Grandes Villes.* XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.

ID. — *L'oeuvre posthume à la biographie du premier président de la Société Hongroise de Statistique.* Budapest, 1928.

ID. — *L'utilisation des observations météorologiques par la statistique officielle.* XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.

THOMPSON W. S. — *Probable future growth of population in the United States.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.

TIBAL ANDRÉ. — *La crise des Etats agricoles européens et l'action internationale.* Paris.

TSCHIERSCHKY S. — *Etude sur le nouveau régime juridique des ententes économiques en Allemagne et en Hongrie.* Genève, 1932.

TURQUIE. — *Annuaire statistique* 1930-31. Ankara, 1931.

VANDERVELDE E. — *Le marxisme a-t-il fait faillite ?* Bruxelles, 1928.

VILLE DE LOTZ. — *Annuaire statistique* 1925, 1927. Lodz.

VAN ZANTEN. — *Relevés locaux de la circulaire complète.* XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.

ACTUARIAL SOCIETY OF AMERICA. — *Transactions,* Vol. XXXII, Part. 2, n. 86. New York, 1931.

ANDREWES F. W. and CHRISTIE E. M. — *The haemolytic streptococci, their grouping by agglutination.* Londra, 1932.

BANK OF THE REPUBLIC OF COLUMBIA. — *Eight Annual report presented by the Manager to the Board of Directors.* — Bogotà, 1931.

BOOTH CH. — *Industrial unrest and trade union policy.* London, 1913.

BOURDILLON R. B., BRUCE H. M., FISCHMANN C., WEBSTER T. A. — *The quantitative estimation of vitamin D by radiography.* London, 1931.

BOWLEY A. L. — *National progress in wealth and trade.* London, 1904.

BRADLEY F. S. and WILLIAMSON M. A. — *Rural children in selected counties of north Carolina.* Washington, 1918.

CANNAN E. — *Wealth.* London, 1924.

CARNEGIE A. — *Triumphant democracy*. London, 1886.
CATHEART E. P. and MURRAY A. E. — *Studies in nutrition. An inquiry into the diet of families in Cardiff and Reading*. Londra, 1932.
CENSUS OF ENGLAND and WALES 1931. London, 1932.
CHANG C. C. — *A proposed plan for taking China's first agricultural census*. XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.
CHANG-HENG CHEN. — *China's Population problem*. XIX Session of the International Institut of Statistics. Tokio, 1930.
CHING HO. — *A sociological analysis*. Peiping, 1930.
CHIOZZA-MONEY. — *Riches and Poverty*. London.
CHUNGSEHN S. CHEN. — *The chinese census of population since* 1912. XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.
CLARK J. D. — *Formosa*. Shanghai, 1896.
COATS R. H. — *Enumeration and sampling in the field of the census*. « Journal of American Statistical Association ». 1931.
COLUMBIA UNIVERSITY. — *A bibliography of the faculty of Political Science : 1880-1930*. New York, 1931.
CORNELISSEN. — *Théorie du salaire et du travail salarié*. Paris, 1908.
CORNELL UNIVERSITY. — *Wheat prices and the world wheat market*, by V. Prokopovich Timoshenko. Ithaca, 1927.
ID. — *Definition of transit as regards passengers*. — XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.
CRAIG J. I. — *Statistics of consumption and of annual stocks-in-hand*. XX Session of the International Instutute of Statistics. Madrid, 1931.
DAVENPORT C. — *The mechanism of organic evolution*. « Journal of the Washington Academy of Sciences », n. 14, 1930.
DAVIS J. S. — *Essays in the earlier history of american corporations*. Vol. XVI, n. 1-3, 5.
DAWSON S. — *Intelligence and Disease*. Londra, 1931.
DE FELLNER F. — *The national income of Hungary*. XIX Session of the International Institut of Statistics. Tokio, 1930.
DELAISI FRANCIS. — *Political myths and economic realities*. New York.
DODD E. L. — *Frequency laws showing stability with reference to the geometric mean and other means*.
DÔKE' S. — *Economic developpement in Japan since the Meiji restoration, from its statistical point of view*. XIX Session of International Institut of Statistics. Tokio, 1930.
EGGLESTON E. — *The beginners of a nation*. New York, 1900.
EVENTOFF L. — *Wages in the Soviet-Union and in the capitalist countries*. XIX Session of International Institute of Statistics. Mosca, 1930.
EVERETT EUGÈNE LUND. — *The effect of diet upon the intestinal fauna of temopsis*. « University of California Publications in Zoology. Berkeley, 1930.
FISCHELIS R. and OREM R. — *The cost of medicines*. Washington.
FLINDERS PETRIE. — *Social life in ancient Egypt*. London.
GELDEREN J. — *The census of* 1930 *in the Netherlands East Indies*. XIX Session of International Institute of Statistics. Tokio, 1930.
GRACE W. PAILTHORPE. — *Studies in the psychology of delinquency*. London, 1932.

McGregor A. G. — *World depression to world prosperity*. London, 1931.
Griffiths C. Evans. — *Mathematical introduction to economics*. New York, 1930.
Grinnell Mears E. — *Resident orientals on the American Pacific Coast*. Chicago.
Haldane J. B. — *Possible worlds*. London, 1928.
Hasehawa T. — *Population of Japon* 1920 *and* 1925. XIX Session of International Institut of Statistics. Tokio, 1930.
Harper R. M. — *The population of Mexico : An Analysis*. « Pan American Magazine » Vol. XLIV, n. 4, april 1931. Washington.
Heilman R. E. — *Annual report of the dean of the School of Commerce*. Chicago 1929-1930.
Hilton J. — *Tables for report on real wages and unemployment*. XX Session of International Institute of Statistics. Madrid, 1931.
Hoffman F. — *The homicide record of* 1930.
Hogg H. Margaret. — *The incidence of work shortage*. New York, 1932.
Honjo E. — *The population and its problems in the Tokugawa Era*. XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.
Insolera F. — *On the oldest age*. Torino, 1931.
International Labour Office. — *Is unemployment inevitable ?* London, 1924.
Id. — *Statistical methods for measuring occupational morbility and mortality*. Genève, 1930.
Id. — *Wage changes in various countries* 1914 *to* 1925. Genève, 1926.
Irwin J. O. — *Recent advances in mathematical statistics*.
Isserlis L. — *On the moment distributions of moments in the case of samples drawn from a limited universe*. « Proceedings of the Royal Society », vol. 132, 1931.
Kambe M. — *Rising tendency of land values in Japan : its effects, causes and some control measures*. XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.
Kameda T. — *Application of the method of sampling to the first Japanese population census*. XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.
Kanaya S. — *Day census in the central districts of the City of Tokyo*. XIX Session of International Institute of Statistics. Tokio, 1930.
Kumar Sarkar Benoy. — *Comparative birth, death and growth-rates*. Calcutta, 1932.
Kushida Manzo-Tsuneta Jano. — *The International Chamber of Commerce and Industrial Statistics*. Tokio, 1930.
Landauer Walter and Anna. — *Chick mortality and sex-ratio in the domestic fowl* « American Naturaliste » vol. LXV, 1931.
League of Nations. — *Financial position of Austria in the second quarter of* 1932. Genève, juillet 1932.
Id. — *Financial position of Hungary in the second quarter of* 1932. Genève, juillet 1932.
Id. — *Report of the gold delegation of the financial committee*. Genève, 1932.
Lecky W. E. H. — *History of european morals*. London, 1911.

LIEU D. K. — *Statistical work in China.* XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

LOFTUS P. C. — *A main cause of unemployment.*

LOSSING BUCK J. — *Variability in rural China.* XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

LOTKA J. L. — *Orphanhood in relation to demographic factors.* « Metron » vol. IX, n. 2, 1931. Roma.

LYNCH E. J. and NOBLE E. A. — *Notes on the* Genus Endosphœra *Engelmann and on its occasional host opisthonecta Hemseguyi.* University of California Publications in Zoology. Berkeley, 1931.

MARRIOTT B. A. — *Primitive property.* London, 1878.

MATSUOKA YOSUKE. — *An address on Manchuria — Its past and present.* Kyoto, 1929.

MATSUDA T. — *The family budget enquiry in Japan* 1926-27. XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

MEDICAL RESEARCH COUNCIL. — *Alcohol and inheritance : an experimental study,* by F. M. DURHAM and H. M. WOODS. London, 1932.

ID. — *The physique and health of two african tribes,* by J. B. ORR and J. L. GILKS. London, 1931.

ID. — *Psychological factors in peripheral vision,* by G. C. GRINDLEY. London, 1931.

ID. — *The quantitative estimation of Vitamin D by Radiography,* by R. B. BOURDILLON, H. M. BRUCE, C. FISHMANN and T. A. WEBSTER. London, 1931.

ID. — *Reports of the Committee upon the physiology of hearing.* London, 1932.

ID. — *Report of the Medical Research Council for the year* 1930-31. London, 1932.

MLYNARSKY F. — *The functioning of the gold standard.* Genève, 1931.

MORDECAI EZEKIEL. — *European competition in agricultural production with special reference to Russia.* Washington, 1931.

MORI K. — *The estimate of the national wealth and income of Japan.* XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

MORITO T. — *Female labour in Japan.* XIX Session International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

MURRY J. M. — *The fallacy of economics.*

NAGASAWA R. — *The method of statistical investigation concerning agricultural production in Japan.* XIX Session of the International Intitute of Statistics. Tokio, 1930.

NEMIROVSKY M. and PREUSS D. W. — *Survey of recent economic development in Palestine.* Tel-Aviv, 1932.

NICHOLSON J. S. — *The relations of rents wages and profits in agriculture.* London, 1906.

NIGERIAN GOVERNMENT. — *The Nigeria hand book* 1922-23.

OUCHI H. — *Tax burden on salaried men and farmers as revealed by the official Survey of their livings.* XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

PIKLER ANDREAS. — *Groundwork to a kinetic theory of Money.* Matyasföld, 1931.

PRASAD BENI. — *The theory of government in ancient India.* Allahabad 1927.

PRIAULX H. — *A study of the species of eimeria occurring*. University of California « Publications in Zoology ».

RAGNAR FRISCH. — *Capital production and consumer-taking*. « The Journal of Political Economy », 1931.

ID. — *New methods of measuring marginal utility*. Tübingen, 1932.

REED LOUIS R. — *The healing cults*. Washington.

RITCHIE THOMAS. — *The moral and historical works of Lord Bacon*. London, 1857.

ROREM RUFUS and FISCHELIS R. — *The cost of medicines*. Washington.

SANDERS J. M. D. — *The declining birth rate in Rotterdam*. La Haye, 1931.

SCOVILLE J. W. — *The automotive industry*.

SHENG I. — *The revision of the price index numbers*. Shanghai, 1931.

SHIMOJO Y. — *Outline of the recent statistical works in Japan*. XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

SHIOMI S. — *The burden of taxation on the citizens of big cities in Japan, on the Osaka citizens in particular*. XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

SMITH ELLIOTT. — *The search for man's ancestors*.

SOCIAL SCIENCE RESEARCH COUNCIL OF NEW YORK. — *International wage comparisons*. Manchester, 1932.

STAMP J. C. — *The effect of trade fluctuations upon profits*. " The Journal of the Royal Statistical Society ". Vol. LXXXI, Part. IV (July 1918).

SUMIO T. — *On the basis for determining of the rate of mortality in Japanese Standard experience table*. XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

THOMPSON W. S. — *Probable future growth of population in the United States*. Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

UNITED STATES DEPARTMENT OF AGRICULTURE. — *The influence of weather on crops :* 1900-1930. Washington, october 1931.

ID. — *Switzerland*. Washington, marzo 1932.

WALKER F. A. — *Political economy*. London, 1883.

CHEN WARREN H. — *An estimate on the population of China in* 1929. XIX Session of the International Institut of Statistics. Tokio, 1930.

WARREN M. PERSONS. — *The recession of* 1929-30 *in the United States*. XIX of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

WARREN RICHARD and MENDENHALL R. M. — *The Mendenhall-Warren-Hollerith correlation method*. Columbia University 1929.

WEI LIN PETER. — *A statistical study of the personnel of chinese national government*. XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

WHELPTON P. K. — *Trends in population increase and distribution during* 1920-30. " The American Journal of Sociology " n. 6, 1931.

WILLCOX A. F. — *The statistical basis of the American " National Origins " law restricting immigration*. XX Session of the International Institute of Statistics. Madrid, 1931.

ID. — *A westerner's effort to estimate the population of China and its increase since* 1650. XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.

WILLIAMS W. L. — *Armenia, past and present.* London, 1916.
WISHART J. — *The mean and second moment coefficient of the multiple correlation coefficient, in samples from a normal population.* " Biometrika " Cambridge, 1931.
WUNDT W. — *The facts of the moral life.* London, 1897.
XENOPHON'S WORKS. — *New York* 1852.
YOKOYAMA M. — *A biographical sketch of Dr. K. Sugi.* XIX Session of the International Institute of Statistics. Tokio, 1930.
ZIMMERMANN H. J. — *Animal and vegetable fats and oils.* Washington, 1930.
ANDERSON OSCAR. — *Ladislaus von Bortkiewicz.* " Zeitschrift für Nationalökonomie. Vienna, 1932.
BADISCHEN LANDESVERBAND ZUR BEKÄMPFUNG DES KREBES. — 50 *Jahre Krebssterblichkeit in Baden.* Karlsruhe, 1931.
ID. — *Badische gemeindestatistik.* Karlsruhe, 1927.
ID. — *Die Industrie in Baden.* Karlsruhe, 1926.
ID. — *Statistisches Jahrbuch für das Land Baden.* Karlsruhe 1930.
BALAS KARL. — *Das Neue Bevölkerungsproblem.* Budapest, 1932.
BOHMERT W. — *Die Elemente des Wachstums einer deutschen Grossstadt.* XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.
ID. — *Die Todesfälle an Krebs nach dem Alter* 1901-1930. XX Session de l'Institut International de Statistique. Madrid, 1931.
BUNDESAMT FÜR STATISTIK. — *Statistisches Handbuch für die Republik Osterreich.* Vienna, 1931.
CASTRILLI V. — *Die Saüglingssterblichkeit in Bari.* Berlino, 1927.
EIDGENOSSICHEN STATISTISCHES AMT. — *Werden sein Vergehen.* Zürich.
FISCHER GUSTAV. — *Ueberlebenstafeln von Familiennamen.* Jena, 1925.
RAGNAR FRISCH. — *Einige Punkte einer Preistheorie mit Boden und Arbeit als Produktionsfaktoren.* " Zeitschrift für Nationalökonomie. Vienna, 1931.
GRAF LUCIA ANNY. — *Uber eine Schädelserie aus West-Neu-Guinea.* Zürich, 1931.
HACKER IN MISKOLC E. — *Internationale Kriminalstatistik.* Berlin, 1931.
GUMBEL E. J. — *Das Zufallsgesetz des Sterbens.* « Atti del Congresso Internationale dei Matematici ». Bologna, 1928.
HUBNERS. — *Geographisch-Statistische Tabellen.* 1932.
HUMAR-STIFTUNG. — *Bevölkerungsaufbau, Wohnungspolitik und Wirtschaft.* Berlin, 1931.
INSTITUT FÜR WIRTSCHAFTSBEOBACHTUNG. — *Konjunktur und Saisonenpfindlichkeit in der Fertigwarenwirtschaft.* Nürnberg, 1931.
KOKKALIS A. — *Das problem der Arbeitslösigkeit unter Berücksichtigung der Wirtsschaftlichen Entwicklung Deutschlands.* Nürnberg, 1932.
KUCZYNSKI R. — *Deutschland und Frankreich.* Berlin, 1924.
LOSCH H. J. — *Die Statistik der Pendelwanderung.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.
LUPANIE NIKO. — *Der anten Ursprung und Name.* Athènes, 1932.
MORGENSTERN O. — *Wirtschaftsprognose.* Wien, 1928.
MUCKERMANN H. — *Stauungsprinzip und Reifezeit.*
NIEDERMEYER A. — *Die Eugenik und die Ehe und Familien gesetzgebung in Sowjetrussland.* Berlino, 1931.

PFUSSE URNO. — *Zeitschrift des Sächsischen Statistischen Landesamtes.* Jarhgang 1930. Dresda, 1931.
PIKLER ANDREAS. — *Grundwork to a kinetic theory of money.* Matyasföld, 1931.
ID. — *Grundlegung zu einer kinetischen Theorie des Geldes.* Matyasföld, 1931.
ID. — *A kinetikai Penzelmetet rovid alaptvese.* Budapest, 1932.
PLATZER H. — *Zur Statistik der Fertigwarenpreise.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.
PREUSSEN FREISTAAT. — *Statistisches Jahrbuch.* Berlin, 1931.
REICHEL H. — *Alfred Ploetz und die rassenhygienische Bewegung der Gegenwart.* " Wiener klinischen Wochenschrift " n. 27. Wien, 1931.
ID. — *Das Eigenheim und seine sozialhygienische Bedeutung.* Ibidem, n. 27.
ID. — *Zum Gedächtnis Dr. Rudolf Wlassaks.* Ibidem, n. 17.
ID. — *Grundlagen der Vererbungswissenschaft und eugenik.* Wien, 1930.
ID. — *Häbländliches Siedelungswesen.* " Woksgesundheit ". Wien, 1931.
ID. — *Probleme der Wohnungshygiene.*
ROESLE E. — *Ergebnisse der Magdeburger Todesursachenstatistik für die Jahre* 1926-1930.
SCHAFER ERICH. — *Beschäftigung und Beschäftigungsmessung in Unternehmung und Betrieb.* Nürnberg, 1931.
SCHLAGINHAUFEN OTTO. — *Die anthropologische Untersuchung an den Schweizerischen Stellungspflichtigen.* Berne, 1931.
ID. — *Der Schädel des Mathematikers Ludwig Schläfli.* Berna, 1931.
STATISTISCHES JAHRBUCH DER STAADT BERLIN 1931.
TAKANO I. — *Ueber Haushaltungsehebungen und deren Durchfürungen in Japan.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.
TAKARABE S. — *Auszug aus einem Aufsatz (japanisch).* Kyoto.
VERRIJN STUART C. A. — *Volksvermögen und Volkseinkommen in den Niederlanden.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.
WAGENFUHR HORST. — *Forschungsstätten der Wirtschafts und Sozialwissenschaften im deutschen Sprachgebiet.* Nürnberg, 1930.
ID. — *Marktbeobachtung.*
WEINBERG W. — *Zur probandenmethode.* " Hereditas " XV, 1931. Lund.
ID. — *Zur probandenmethode und zu ihrem Ersatz.* Stuttgart, 1929.
WINKLER WILHELM. — *Grundriss der Statistik.* Berlino, 1931.
ID. — *Statistik der Verschiebungen in der Ernährung der Erdbevölkerung.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. Tokio, 1930.
WURZBURGER E. — *Zur Entwicklung des International Statistischen Instituts.* Leipzig, 1929.
ZAHN F. — *Der Preis der menschlichen Arbeit in seiner Bedeutung für Produktion und Verbrauch.* XIX Session de l'Institut International de Statistique. La Haye, 1930.
BACHAREL M. — *Aspectos economicos e financieiros do Estado de Bahia.* Bahia, 1931.
BANKATINWINNING. — *Verslag over Het Exploitatiejar* (I januari-31 december 1930).
CENTRAL BUREAU VOOR DE STATISTIK. — *Jaarcijfers voor nederland.* S' Gravenhage, 1932.
CONGRÈS INTERNATIONAL DES HÔPITAUX. — *Nosokomeion.* Wien, 1931.

DASZYNSKA GOLINSKA Z. — *Podstawy Teoretyczne Polityki Spolecznej w Zarysie*. 1932.

DEPARTAMENTO NACIONAL DE SAUDE PUBLICA DO BRASIL. — *Annuario de Estadistica Demographo-Sanitaria*. Rio de Janeiro, 1931.

DIREÇAO GERAL DE ESTATISTICA. REPUBLICA PORTUGUESA. — *Estatistica Comercial* 1930. Lisbonne, 1931.

DIRECTORIA DO SERVIÇO DE ESTATISTICA DO ESTADO DE BAHIA. — *Exportation de Bahia*. — *Brésil pour l'étranger*. Bahia, 1929.

FINLAND OFFICIELLA STATISTIK. — XVIII a Teollisunstilastoa 47 vuonna 1930 Industristatistik 47 an 1930. Helsinski, 1932.

GALVARRIATO J. A. — *El Banco de España*. Madrid, 1932l

Народное хозяйствоссср – статистическии справочник 1932 – соцэкиз, 1932.

INDISCH VERLAG 1931. — II STASTISCH JAAROVERZICHT VAN N. I. — OVER 1930. Batavia, 1931.

INSTITUTO BRASILEIRO DE ESTUDOS ECONOMICOS E RACIONALIZAÇAO. Manifesto-Programma. São Paulo, 1931.

INSTITUT DE STATISTICA GENERALA A STATULUI. — *Statistique minière de la Roumanie* 1930. Bucarest, 1931.

MINISTERIO DE TRABAJO Y PREVISIÓN. — *Anuario Estadístico de España*. Madrid, 1931.

ID. — *Annuario Estadístico de España* (*Graficos*) 1929. Madrid, 1931.

ID. — *Estadística de salarios y jornadas de trabajo referida al periodo* 1914-1930. Madrid, 1931.

MONTEIRO ARMINDO. — *Do Orçamento Português*, Tomo I e II. Lisbona, 1921.

NORGES OFFICIELLE STATISTIKK. — Vol. VIII, 1931, N. 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 165, 166, 167, 168, 170, 172. — Vol. VIII, 1932, N. 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192.

PERU (Ministerjo de Hacienda y Comercio). — *Extracto Estadístico del Peru* 1929-1930. Lima, 1931.

PULLERITIS. — *Estland*. Tallinn, 1931.

SARVIÇO SANITARIO DO ESTADO DE SÃO PAULO. — *Annuario Demographico* 1928. São Paulo, 1929.

SPARN ENRIQUE. — *Las sociedades Cientificas, literarias y técnicas del mundo*. Cordoba, 1931.

STATYSTYKA POLSKY. — *Pierwszy Powszechny Spis Rzeczypospolitej Polskiej z dnia* 30 *Wrzésnia* 1921 *Roku*. Warszaw, 1931.

ID. — *Statystyka Finansow Komunalnych*, 1927-28. Warszaw, 1931.

SUOMEN VIRALLINEN TILASTO. — *I° Ulkomankauppa Vnosijulkaisu* 51. 1931. Helsinski, 1932.

VALSTS STATISTISKA PARVALDE. — *Latvijas Areja Tirdznieciba un Tranzits* 1926. Riga, 1927.

ID. — *Latvijas Lauksaimnieciba* 1931. gada. Riga, 1932.

WYDZIAL STATYSTYCZNY MAGISTRATU M. LODZI. — *Rocznik Statystycny Miasta Lodzi* 1923, 1924, 1926, 1928, 1929. Lodz.

PROF. CORRADO GINI, *Direttore responsabile*.

Roma — «L'Universale» Tipografia Poliglotta.